

# Влияние анизотропии упругости на термонаведённые искажения лазерного пучка в монокристаллах кубической сингонии с радиальным теплоотводом. Ч. 3

А.Г.Вяткин

*Исследована термонаведённая деполяризация лазерного пучка в монокристаллах кубической сингонии групп симметрии  $23$  и  $m\bar{3}$  с анизотропным тензором упругой жёсткости. Для активных элементов в виде длинного стержня и тонкого диска с радиальным теплоотводом при однородной по объёму накачке исследовано влияние анизотропии упругих свойств на зависимость степени деполяризации в кристалле от ориентации кристаллографических осей, а также на положение критической ориентации в кристаллографической системе координат.*

**Ключевые слова:** лазеры с высокой средней мощностью, фотоупругий эффект, термонаведённая деполяризация, анизотропия кубических кристаллов.

## 1. Введение

Тепловые эффекты – важный фактор, ограничивающий мощность и качество выходного излучения твердотельных лазеров [1, 2]. Термонаведённая деполяризация излучения в изначально оптически изотропных средах – кубических монокристаллах, стёклах и керамиках – исследуется теоретически и экспериментально с 1960-х гг. по настоящее время. За исключением единичных работ, в кубических кристаллах учитывается, как правило, только анизотропия фотоупругого эффекта, а упругие свойства материалов считаются изотропными (см. ссылки в [3]). Однако уже на начальном этапе было не только известно, что это лишь приближение, но и было найдено решение задачи упругости для параболического профиля температуры [4].

Мы исследуем термонаведённые искажения пучка в монокристаллах кубической сингонии всех групп симметрии с учётом анизотропии их упругих свойств и при произвольной ориентации кристаллографических осей. В первой части нашей работы – статье [3] – были получены выражения для фазовых и поляризационных искажений пучка в активных элементах в виде длинного стержня и тонкого диска. Найдены поляризации собственных волн, а также среднее арифметическое и разность набегов их фаз; рассмотрены выделенные ориентации кристаллов; определены эффективные значения термооптических постоянных  $P$  и  $Q$ . Во второй её части – статье [5] – изучалась термонаведённая деполяризация в монокристаллах групп симметрии  $432$ ,  $\bar{4}3m$  и  $m\bar{3}m$ . Настоящая статья – третья часть работы – посвящена анализу термонаведённой деполяризации излучения в упругоанизотропных монокристаллах групп симметрии  $23$  и  $m\bar{3}$  в сравнении с упругоизотропным случаем и нахождению при слабом и

сильном двулучепреломлении оптимальных ориентаций кристаллографических осей, позволяющих минимизировать степень деполяризации. В разд.2 вводятся необходимые для постановки задачи обозначения, в разд.3 определяются выделенные ориентации в  $m\bar{3}$ -кристаллах. В разд.4 исследуется степень деполяризации в монокристаллах, для которых отсутствует критическая ориентация, а в разд.5 исследуется критическая ориентация в кристаллах с отрицательным значением первого параметра фотоупругой анизотропии.

## 2. Постановка задачи и некоторые обозначения

В настоящей работе мы ограничимся средами, не вращающими плоскость поляризации. Рассмотрим активный элемент в форме цилиндра, ось которого  $z$  совпадает с направлением распространения пробного излучения. Элемент может быть вырезан из толщи кристалла различным образом и однозначно задаётся положением своей оси в кристаллографической системе координат. Это может быть сделано при помощи первых двух из трёх углов Эйлера – азимутального ( $\alpha$ ) и полярного ( $\beta$ ) (см. рис.1,  $a, b, \gamma$  в [3]), при этом третий угол Эйлера ( $\Phi$ ) будет равен с обратным знаком углу поворота активного элемента вокруг своей оси относительно лабораторной системы координат (см. рис.1,  $v, \gamma$  в [3]).

Принято говорить, что пара углов Эйлера ( $\alpha, \beta$ ) задаёт ориентацию кристалла, также обозначаемую при помощи индексов Миллера  $[MNP]$ . В данной работе существенное внимание уделено ориентациям вида  $[MON]$  и  $[MMN]$ , показанным на рис.1. Следуя традиции, мы не будем различать ориентации, полученные друг из друга циклической перестановкой индексов ( $[NPM]$ ,  $[PMN]$ ) и изменением знаков индексов ( $[M\bar{N}\bar{P}]$ ,  $[\bar{M}\bar{N}\bar{P}]$  и др.) вследствие их эквивалентности [6].

Рассмотрим активный элемент в форме длинного цилиндрического стержня или тонкого диска радиусом  $R$ , нагреваемый равномерно по объёму и охлаждаемый через боковую поверхность. Поля температуры и упругих напряжений приведены в [3] и не зависят от  $z$ , если пренебречь концевыми эффектами в стержне.

**А.Г.Вяткин.** Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: vyatkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 1 октября 2020 г., после доработки – 30 апреля 2021 г.

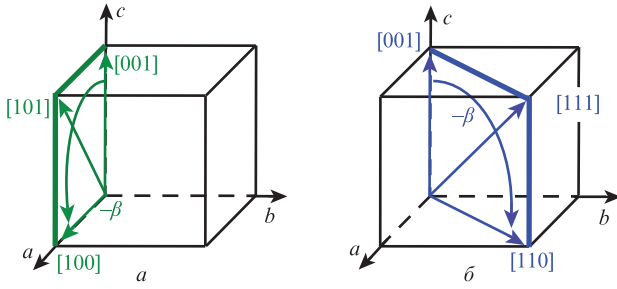


Рис.1. Ориентации  $[M0N]$  ( $\alpha = 0$ ) в кристаллографической системе координат  $(a, b, c)$  (а) и ориентации  $[MMN]$  ( $\alpha = \pi/4$ ) (б).

Боковое охлаждение тонкого диска не является оптимальным, но позволяет рассчитать степень деполяризации аналитически. Мы считаем, что выявленные нами закономерности будут применимы и в случае торцевого теплоотвода, несмотря на невозможность количественной оценки величины термонаведённых искажений пучка.

Локальной степенью деполяризации  $\Gamma$  принято называть долю интенсивности излучения, перешедшую при распространении через двулучепреломляющую оптическую систему в ортогональную исходной поляризации. Интегральной степенью деполяризации называют аналогичную долю мощности. В приближении плоских волн несложно получить, что после прохождения вдоль оси одного активного элемента, диэлектрический тензор которого не зависит от  $z$ , лазерного пучка, изначально линейно поляризованного в перпендикулярной плоскости  $xу$  под углом  $\theta$  к оси  $x$ ,

$$\Gamma(x, y) = \sin^2(\delta/2)\sin^2[2(\Psi - \theta)], \tag{1}$$

где  $\Psi(x, y)$  – угол наклона вектора поляризации одной из собственных волн в активном элементе, а  $\delta(x, y)$  – разность набегов их фаз. Усреднив (1) по сечению пробного пучка с напряжённостью поля  $E_{in}(x, y)$ , получим интегральную степень деполяризации

$$\gamma = \left( \iint_S |E_{in}|^2 dS \right)^{-1} \iint_S \Gamma |E_{in}|^2 dS \tag{2}$$

(для простоты полагаем, что поглощение и усиление пробного излучения в среде отсутствуют). При сильном двулучепреломлении  $\gamma$  стремится к установившемуся значению

$$\gamma_\infty = \left( \iint_S |E_{in}|^2 dS \right)^{-1} \iint_S \tilde{\Gamma}_\infty |E_{in}|^2 dS, \tag{3}$$

где  $\tilde{\Gamma}_\infty = \frac{1}{2} \sin^2[2(\Psi - \theta)]$  (см. [7] и рис.2 из [5]).

Выражения для  $\delta$  и  $\Psi$  в кристаллах с анизотропными упругими свойствами были получены нами в [3]. Не приводя здесь полных выражений, напомним, что они различаются в тонком диске и длинном стержне, а также что  $\delta$  пропорциональна мощности тепловыделения в оптическом элементе, а  $\Psi$  от неё не зависит. В расчётах мы используем безразмерную мощность тепловыделения  $p$ , которая была обобщена на упругоанизотропные среды в работе [3].

Кубические кристаллы можно разделить на два типа по виду их материальных тензоров. В статье [5] рассматривались кристаллы групп симметрии  $m\bar{3}m$ ,  $432$  и  $\bar{4}3m$ , которые в [3] мы условились называть  $m\bar{3}m$ -кристаллами. Их материальные тензоры 4-го ранга, пьезооптический тензор  $\pi$  и тензор упругой податливости  $s$ , определяются

тремя независимыми ненулевыми коэффициентами, а общий вид в двухиндексных обозначениях Ная схематично представлен в [8], а также на рис.2,а из [3]. В настоящей статье мы рассмотрим остальные кристаллы кубической сингонии, относящиеся к группам симметрии  $m\bar{3}$  и  $23$ , которые мы называем  $m\bar{3}$ -кристаллами. Для них тензор  $s$  такой же, а тензор  $\pi$  определяется четырьмя независимыми коэффициентами (см. рис.2,б из [3]) [8].

Зависимость термонаведённых искажений пучка от ориентации кристаллографических осей в кубических кристаллах в приближении изотропной задачи упругости определяется параметром фотоупругой анизотропии  $\xi$  [7, 9], в качестве которого мы используем пьезооптическое отношение, с учётом особенностей симметрии  $m\bar{3}$  имеющее вид [6]

$$\begin{aligned} \xi_\pi &= \pi_{66}/\pi_s, \\ \pi_s &= \pi_{11} - \frac{1}{2}(\pi_{12} + \pi_{21}). \end{aligned} \tag{4}$$

Там же было показано, что в  $m\bar{3}$ -кристаллах наряду с параметром  $\xi$  необходимо определить второй параметр фотоупругой анизотропии

$$\xi_d = (\pi_{12} - \pi_{21})/\pi_s. \tag{5}$$

В  $m\bar{3}m$ -кристаллах

$$\begin{aligned} \pi_s &= \pi_{11} - \pi_{12}, \\ \xi_d &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В работе [3] мы получили, что в средах с анизотропными упругими свойствами зависимость термонаведённых искажений пучка от ориентации модулируется функциями, которые определяются комбинацией коэффициента Пуассона для ориентации  $[001] v_{[001]}$  [10] с параметром упругой анизотропии

$$\xi_s = \frac{s_{66}}{2(s_{11} - s_{12})}. \tag{7}$$

Сравним для различных ориентаций кристаллографических осей степень термонаведённой деполяризации, рассчитанную для упругоанизотропных кубических монокристаллов в виде длинного стержня и тонкого диска, с рассчитанной в приближении изотропной упругости. Основное внимание уделим выбору оптимальной ориентации. Поскольку в эксперименте угол поворота кристалла  $\Phi$ , в отличие от остальных углов Эйлера, может быть легко изменён после изготовления активного элемента, будем исследовать минимальную по  $\Phi$  степень деполяризации, которую назовём оптимальной. Для упрощения расчётов будем считать, что пробный пучок имеет П-образный поперечный профиль интенсивности излучения. Такие пучки часто формируются в мощных многокаскадных лазерных системах. Кроме того, это допущение качественно не влияет на результаты. Радиус пучка обозначим  $r_0$ .

В последнее время представляют интерес кристаллы полупроводников оксидов иттрия, скандия и лютеция (см. [11–13] и ссылки в [6]). Однако фотоупругие свойства  $Y_2O_3$  и  $Sc_2O_3$  известны лишь частично [14], а данные по  $Lu_2O_3$  отсутствуют. Полные данные имеются лишь по редко используемому кристаллам, и зачастую они получе-

ны достаточно давно [8, 15]. Поэтому мы также используем в расчётах гипотетические среды, полученные изменением свойств популярных оптических материалов.

### 3. Выделенные ориентации в упругоанизотропных $m\bar{3}$ -монокристаллах

В  $m\bar{3}$ -кристаллах фотоупругий эффект обладает пониженной симметрией вследствие более низкой, чем в  $m\bar{3}m$ -кристаллах, симметрии кристаллической решётки. Из трёх простейших ориентаций только [111] сохраняет свою симметрию: ориентация [001] обладает более низкой симметрией, а [011] не имеет таковой вовсе [8]. В работе [6] мы показали, что особые свойства, которыми в  $m\bar{3}m$ -кристаллах с этими ориентациями обладает фотоупругий эффект, наблюдаются в упругоизотропных  $m\bar{3}$ -кристаллах с ориентациями более общего вида  $[MON]$ , которые мы назвали  $[[A]]$  и  $[[B]]$ . Положение этих ориентаций в кристаллах определяется отношением

$$q_d = \xi_d / (\xi_\pi - 1). \quad (8)$$

В п.5.2 из [3] мы показали, что в упругоанизотропном диске, а также в приближении слабой упругой анизотропии (см. (50) в [3]) в длинном стержне ориентация  $[[A]]$  остаётся выделенной, а ориентация  $[[B]]$  сохраняется только в диске; в стержне она принимает новое положение, которое мы обозначили  $[[B_\sim]]$ . При более сильной упругой анизотропии в стержне выделенные ориентации должны измениться, но аналитических выражений для соответствующих им углов Эйлера получено не было.

Выделенные ориентации  $[[C]]$  и  $[[D]]$  в  $m\bar{3}$ -кристаллах, в отличие от  $m\bar{3}m$ -кристаллов, не принадлежат множеству  $[MMN]$ .

В то же время тензор упругой податливости сохраняет ту же симметрию, что и в  $m\bar{3}m$ -кристаллах, и эту же симметрию наследуют зависимости компонент тензора напряжений от ориентации кристалла. Таким образом, термонаведённые искажения пучка в упругоанизотропных  $m\bar{3}$ -кристаллах определяются комбинацией двух материальных тензоров, имеющих разную симметрию.

С другой стороны, в [6] было отмечено, что оптимальные ориентации кристаллографических осей упругоизотропных  $m\bar{3}$ -кристаллов совпадают с выделенными  $[[A]]$  и  $[[B]]$  лишь для пробных пучков малого радиуса, тогда как для  $m\bar{3}m$ -кристаллов при любом профиле пучка оптимальна одна из простейших ориентаций [7]. Очевидно, что учёт эффектов упругой анизотропии в  $m\bar{3}$ -кристаллах способен привести к смещению оптимальных с точки зрения деполяризации ориентаций относительно как упругоизотропных, так и выделенных ориентаций. Рассмотрим вопрос о положении оптимальных ориентаций в  $m\bar{3}$ -кристаллах с различными фотоупругими свойствами.

### 4. Термодеполяризация в $m\bar{3}$ -монокристаллах с отсутствующей критической ориентацией

Необходимо напомнить, что в  $m\bar{3}$ -кристаллах критическая ориентация отсутствует не только при  $\xi_\pi > 0$ , но и при  $\xi_\pi < -3$  при условии, что  $|\xi_d|$  превышает пороговое значение, большее двух, в упругоизотропном приближении и в тонком диске определённое в [6] и в (79) из [3]. В отсутствие критической ориентации термонаведённая де-

поляризация, как правило, минимизируется для одной из ориентаций множества  $[MON]$  [6]. Как и в  $m\bar{3}m$ -кристаллах, поведение степени деполяризации в этих ориентациях качественно различается в зависимости от значения  $|\xi_\pi|$ .

#### 4.1. Случай $|\xi_\pi| > 1$

На рис.2 представлена оптимальная степень деполяризации  $\gamma$  в модельных  $m\bar{3}$ -монокристаллах с такими же упругими параметрами  $\nu_{[001]}$  и  $\xi_s$ , как у  $\text{CaF}_2$ , параметром  $\xi_\pi$ , как у YAG, и тремя различными  $\xi_d$ : малым ( $q_d \approx 0.045$ ), средним ( $q_d \approx 0.45$ ) и большим ( $q_d \approx 1.045$ ). Расчёт выполнен при относительно малой ( $p = 1$ ,  $\gamma \ll \gamma_\infty$ ) и большой ( $p \gg 1$ ,  $\gamma = \gamma_\infty$ ) безразмерных мощностях тепловыделения, а также для пробных пучков большого (0.8R) и малого (0.4R) радиусов. Как и в  $m\bar{3}m$ -кристаллах, при слабом двулучепреломлении степень деполяризации отличается от упругоизотропной на величину порядка десятков процентов. Однако количественно это различие зависит от способа определения изотропных модулей упругости (см. разд.3 в [5]). Изломы на кривых при  $p = 1$  связаны с тем, что оптимальное значение угла  $\Phi$  изменяется на  $45^\circ$ .

Из рисунка видно, что при слабом двулучепреломлении оптимальной является ориентация, близкая к аналитической оценке  $[[A]]$ , причём для тонкого пробного пучка, как было нами отмечено ранее в [6], оценка работает лучше. При сильном двулучепреломлении в случае тонкого пробного пучка оптимальной является ориентация, близкая к оценкам  $[[B]]$  и  $[[B_\sim]]$  в диске и в стержне соответственно, а в случае широкого пучка – к  $[[A]]$ . Отметим, что наилучшую ориентацию  $[[B]]$  оценивает с меньшей точностью, при этом в стержне  $[[B_\sim]]$  может работать хуже, чем  $[[B]]$  (рис.2,з,л).

Ометим, что степень деполяризации в диске при сильном двулучепреломлении совпадает с результатом упругоизотропного расчёта (это свойство уже обсуждалось в п.5.1 из [3] и в разд.3 работы [5]), а в остальных случаях для обеих рассмотренных геометрий кристалла учёт анизотропии упругости приводит к небольшому смещению оптимальной ориентации кристалла относительно упругоизотропной. Можно также отметить хорошую точность упрощённого решения Сиротина для стержня, немного ухудшающуюся с ростом  $|\xi_d|$ . Независимость от  $\xi_d$  степени деполяризации для ориентации [011] (см. теорему 6 в работе [6]) сохраняется и в упругоанизотропных средах. Минимум степени деполяризации при слабом двулучепреломлении острый (рис.2,б,в) в случае тонкого пробного пучка и сильной фотоупругой анизотропии ( $|\xi_\pi| \gg 1$ ,  $|\xi_d| \geq 1$ ).

При больших  $|\xi_d|$  форма кривой для длинного стержня в случае широкого пробного пучка существенно отличается от упругоизотропного приближения. Это вызвано различием величин напряжения  $\sigma_{zz}$ . Изменения сосредоточены вблизи ориентации [001] (это не так в  $m\bar{3}m$ -кристаллах, см. разд.3 в [5]), т.е. вдали от ориентации  $[[A]]$ , оптимальной в этих условиях. Вблизи ориентации [011] различия менее выражены.

При сильном двулучепреломлении и тонком пробном пучке напряжение  $\sigma_{zz}$  существенно влияет на деполяризацию вблизи оптимальной ориентации  $[[B]]$ . Изменения также наиболее выражены при больших  $|\xi_d|$ , когда  $[[B]]$  близка к [001]. Их механизм объяснён в разд.3 из [5] и в п.4.2 настоящей работы.

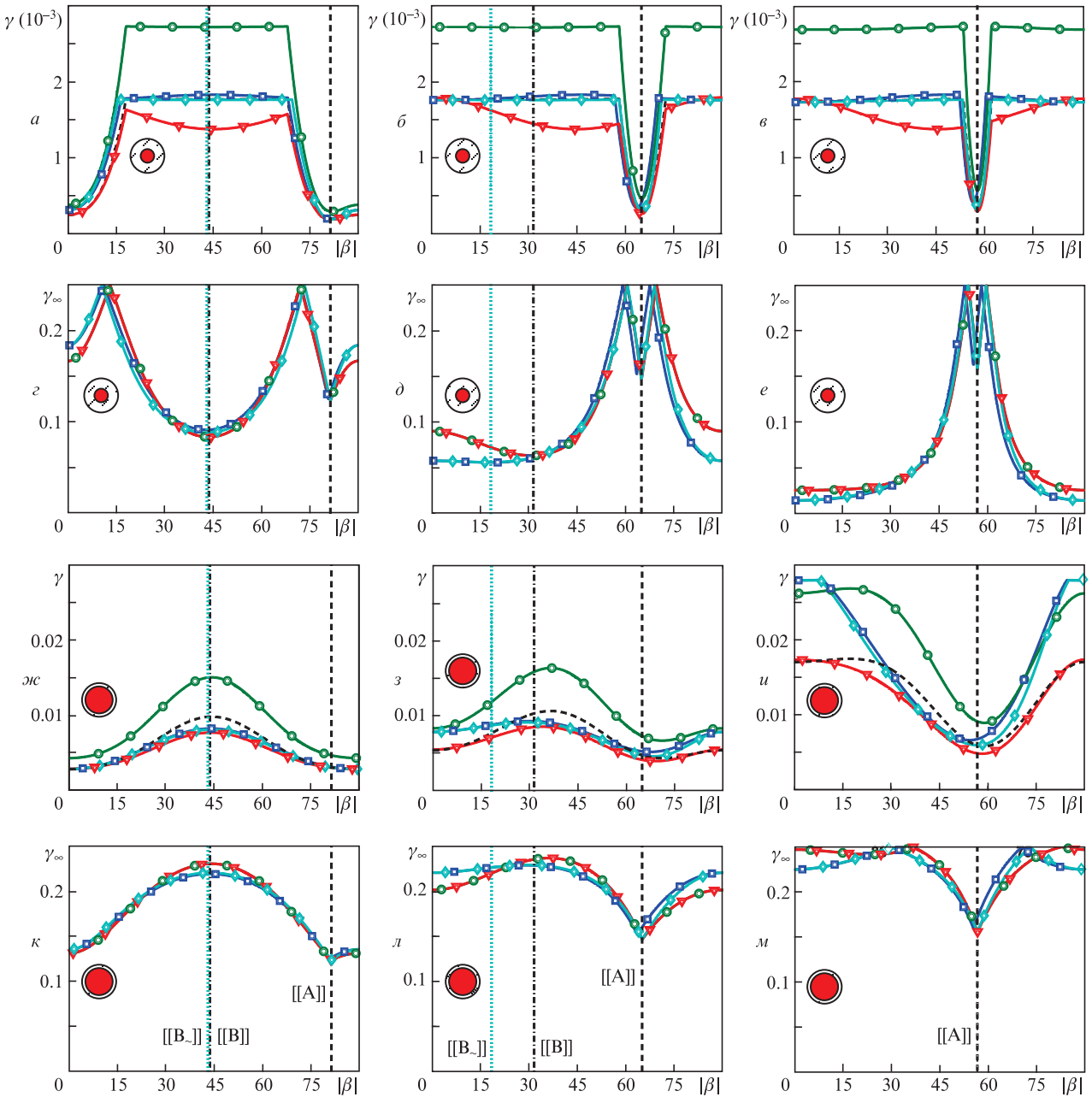


Рис.2. Рассчитанные аналитически оптимальные интегральные степени деполаризации для ориентаций  $[M0N]$  ( $\alpha = 0$ ) как функции угла Эйлера  $\beta$  в  $m3$ -кристаллах с упругими свойствами как у  $CaF_2$ ,  $\xi_\pi$  как у YAG,  $\xi_d = 0.1$  ( $a, z, \xi, \kappa$ ), 1 ( $b, d, z, \lambda$ ) и 2.3 ( $v, e, u, \mu$ ) при  $p = 1$  ( $a-v, \xi-u$ ) и  $p \gg 1$  ( $z-e, \kappa-m$ ). Расчеты проведены в упругоизотропном приближении (зелёные кружки, а при  $p = 1$  также отмасштабированные чёрные штриховые кривые), для тонкого диска (красные треугольники) и для длинного стержня (поле напряжений рассчитано полным (синие квадраты) и упрощённым (голубые ромбы) решениями Сиротина). Радиус пробного пучка составляет  $0.4R$  ( $a-e$ ) и  $0.8R$  ( $\xi-m$ ), пучки схематично показаны в виде кругов. Выделенные ориентации отмечены вертикальными линиями и указаны на рис.к-м.

В средах с отрицательными  $\xi_\pi$  и отсутствующей критической ориентацией влияние упругой анизотропии на термонаведённую деполаризацию и оптимальные ориентации осей кристалла в целом такие же. Однако преимущество ориентации  $[[A]]$  в этом случае более выражено, чем при  $\xi_\pi > 1$ , поскольку величина  $A_{2[[A]]}$  значительно меньше (см. (108) в [3]). В частности  $A_{2[[A]]} = 0$  на границе существования ориентации  $[[C]]$  ((79) в [3]). При слабом двулучепреломлении на деполаризацию влияет малость эффективной термооптической константы  $Q^{eff}$ , а при сильном двулучепреломлении – большая величина эффективного значения параметра анизотропии  $\xi^{eff}$  (см. (108) в [3]).

**4.2. Случай  $0 < \xi_\pi < 1$**

При  $|\xi_\pi| < 1$  оптимальная степень деполаризации в упругоизотропном приближении для всех ориентаций вида  $[M0N]$  в пределе слабого двулучепреломления одинакова, как и в  $m3m$ -кристаллах, а в отсутствие критической ориентации ещё и минимальна среди всех ориентаций. Поскольку в дополнение к этому для  $[011]$  степень деполаризации не зависит от  $\xi_d$  [6], это свойство имеет место для всех ориентаций  $[M0N]$ . В упругоанизотропном кристалле постоянство  $\gamma$  нарушается зависимостью упругих напряжений от ориентации, и оптимальная ориентация целиком определяется упругими свойствами среды.

В статье [14] приведены измеренные значения компонент тензора упругой жёсткости и следующих упругооптических констант для  $Y_2O_3$  и  $Sc_2O_3$ :  $p_{11}-p_{21}$ ,  $p_{12}$ ,  $p_{66}$ . К сожалению, этот набор данных не позволяет найти ни  $\xi_\pi$ , ни  $\xi_d$ . Более того, для нахождения упругооптических констант применён метод, не позволяющий определить их знак.

Однако если считать второй параметр фотоупругой анизотропии равным нулю, первый можно оценить по модулю, используя формулу для  $m3m$ -кристалла, и в обеих средах он меньше единицы (табл.1). В приближении слабого двулучепреломления оптимальная степень деполаризации для ориентаций  $[MON]$  также не зависит от знака  $\xi_\pi$ , поэтому мы предположим для определённости, что в полуторных оксидах  $\xi_\pi > 0$ . Если это не так, то ошибка в наших расчётах будет пренебрежимо мала, но оптимальной ориентацией будет критическая, для нахождения положения которой имеющихся данных недостаточно.

Табл.1. Материальные параметры полуторных оксидов [14].

Среда	$\xi_\pi$	$\xi_d$	$\xi_s$	$v_{[001]}$
$Y_2O_3$	$\pm 0.38(1 + \xi_d/2)$	нет данных	0.65	0.38
$Sc_2O_3$	$\pm 0.64(1 + \xi_d/2)$	нет данных	0.78	0.34

На рис.3 приведены оптимальные интегральные степени деполаризации для ориентаций  $[MON]$  в двух полуторных оксидах и в модельных кристаллах с  $\xi_\pi = 0.2$  в случае широкого пробного пучка при среднем по величине двулучепреломлении. Кривые построены для  $\xi_d = 0$  и 0.5 (для наглядности в случае полуторных оксидов приведены кривые при постоянном  $\xi_\pi$ , соответствующем  $\xi_d = 0$ ) (табл.1). Степени деполаризации при разных  $\xi_d$  различаются из-за нарушения условия малости двулучепреломления, но очень слабо. Оптимальные ориентации при  $\xi_d = 0.5$  отклоняются от простейших также незначительно. С этой точностью оптимальные ориентации определяются так же, как и в  $m3m$ -кристаллах (см. п.4.2 в [5]). В упругоизотропном приближении степень деполаризации практически постоянна. Для тонкого диска при  $\xi_s > 1$  оптимальна ориентация  $[011]$ , а при  $\xi_s < 1 - [001]$ . В длинном стержне ориентация  $[001]$  оптимальна практически всегда. Вариация степени деполаризации для ориентаций  $[MON]$  существенна при сильной упругой анизотропии, когда упрощённое решение Сиротина недостаточно точно.

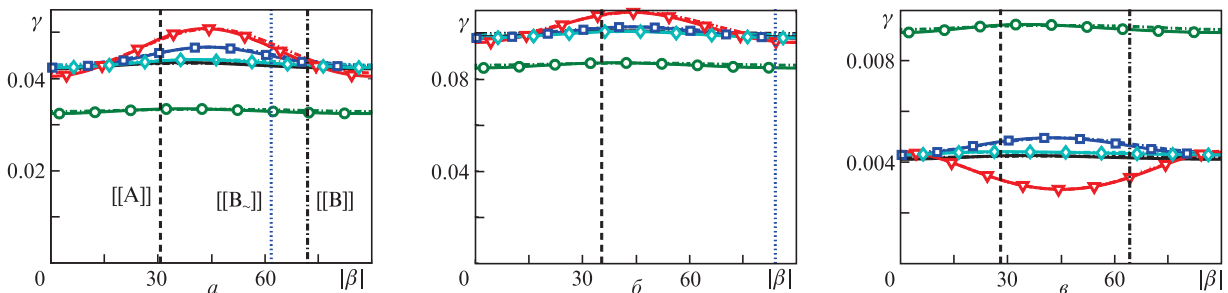


Рис.3. Рассчитанные аналитически оптимальные интегральные степени деполаризации для ориентаций  $[MON]$  ( $\alpha = 0$ ) при  $p = 10$  в дисках (красные треугольники), длинных стержнях (поле напряжений рассчитано полным (синие квадраты) и упрощённым (голубые ромбы) решениями Сиротина) и в упругоизотропном приближении (зелёные кружки и отмасштабированные графики, чёрные кривые) в  $Y_2O_3$  (a),  $Sc_2O_3$  (б) для  $r_0 = 0.7R$  в предположении  $\xi_d = 0$  (штрихпунктирные кривые) и 0.5 (сплошные кривые), а также в среде с упругими свойствами как у  $KCl$ ,  $\xi_\pi = 0.2$  для тех же  $r_0$  и  $\xi_d$  (в). Выделенные ориентации отмечены для случая  $\xi_d = 0.5$  и указаны на рис.а.

При сильном двулучепреломлении ориентация  $[[A]]$ , как и для  $m3m$ -кристаллов, перестаёт быть оптимальной начиная с достаточно широких пробных пучков, что не наблюдается при  $\xi_\pi > 1$  (рис.4). Оптимальной становится ориентация, близкая к  $[[B]]$  в диске и к  $[[B\sim]]$  в стержне, однако для широких пробных пучков она значительно отклоняется от выделенной в сторону ориентации  $[001]$ . В дисках степень деполаризации совпадает с упругоизотропной. В стержнях при больших  $|\xi_d|$ , по мере приближения ориентации  $[[B\sim]]$  к  $[001]$ , сильное влияние на степень деполаризации для оптимальной ориентации начинает оказывать величина напряжения  $\sigma_{zz}$ . При  $\xi_s > 1$  (рис.4,  $z-e$ ) напряжение больше упругоизотропного (см. рис.3,б в [5]), поэтому эффект выстраивания поляризованных собственных волн в центральной области активного элемента, ослабляющий деполаризацию, более выражен, чем в упругоизотропном приближении. При  $\xi_s < 1$  ситуация обратная (рис.4,а-в). Как отмечено в п.4.1, этот эффект имеет место и при  $\xi_\pi > 1$ .

Отметим, что степени деполаризации, которые вычислены для полей напряжений, полученных полным и упрощённым решениями Сиротина, близки. (Наибольшее их расхождение наблюдается в окрестности ориентации  $[[A]]$ , т.е. вдали от оптимальной.) Поэтому на каждом рис.4 для длинного стержня приведена только одна зависимость.

### 5. Критическая ориентация для упругоанизотропных $m3$ -монокристаллов

Как и для  $m3m$ -кристаллов, для  $m3$ -кристаллов критическая ориентация в случае тонкого диска  $[[C]]$  такая же, как и в упругоизотропном приближении (см. формулы (80)–(82) в [3]), а для длинного стержня  $[[C_s]]$  может отклоняться от этого положения (см. п.5.2.2 в [3]). На рис.5 приведены углы отклонения  $\delta_{[[C]]}$  ориентации  $[[C]]$  от упругоизотропной оценки  $[[C]]$  для стержня, а также обобщённая на случай  $m3$ -симметрии нормированная интегральная степень деполаризации

$$\gamma'_N = \frac{\gamma([[C]])}{\min[\gamma([[A]]), \gamma([[B]]), \gamma([[111]])]} \tag{9}$$

для ориентации, соответствующей этой оценке, в средах с  $v_{[001]}$  и  $\xi_s$  как у  $CaF_2$  (рис.5,а, б) и как у  $KCl$  (рис.5,в) в зависимости от  $\xi_\pi$  при различных  $\xi_d$  (рис.5,а, в) и от  $\xi_d$  при различных  $\xi_\pi$  (рис.5,б). Видно, что отклонение критической ориентации при умеренных  $\xi_\pi$ ,  $\xi_d$  и  $\xi_s$  не превышает не-

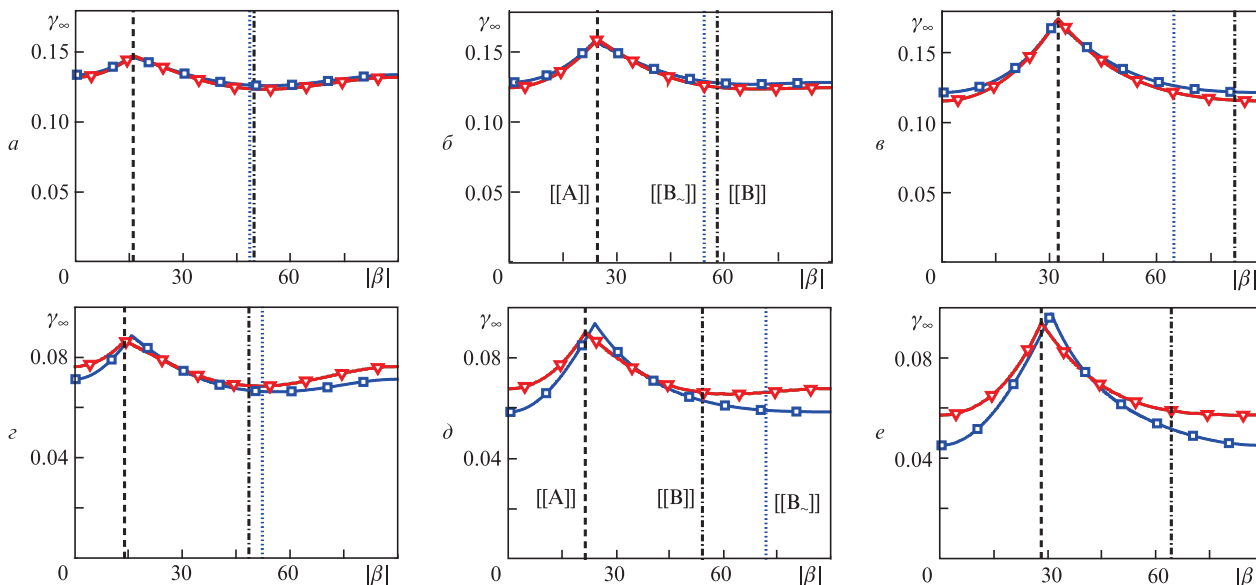


Рис.4. Рассчитанные аналитически оптимальные интегральные степени деполаризации для ориентаций  $[M0N]$  ( $\alpha = 0$ ) при  $p \gg 1$  и  $r_0 = 0.7R$  в упругоизотропном приближении и тонком диске (красные треугольники), а также в длинном стержне (синие квадраты) при  $\xi_d = 0.1$  ( $a, z$ ),  $0.25$  ( $b, d$ ) и  $0.5$  ( $e, e$ ) в  $Y_2O_3$  ( $a-b$ ) и среде с  $\xi_\pi = 0.2$  и упругими свойствами как у KCl ( $z-e$ ). Выделенные ориентации отмечены вертикальными линиями и приведены на рис.  $b, d$ .

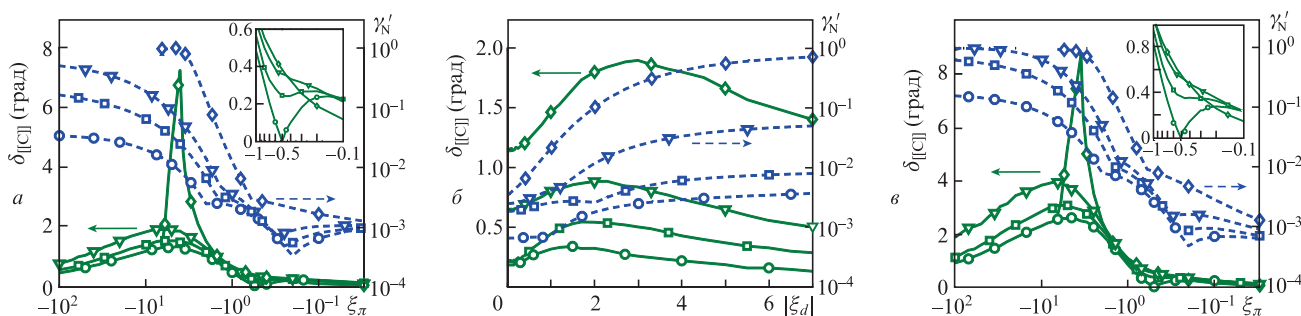


Рис.5. Углы  $\delta_{[[C]]}$  отклонения направления  $[[C_s]]$  от оценки  $[[C]]$  (сплошные кривые), а также нормированные интегральные степени деполаризации для ориентации  $[[C]]$   $\gamma'_N$  (штриховые кривые) в средах с  $v_{[001]}$  и  $\xi_s$  как у CaF<sub>2</sub> ( $a, b$ ) и как у KCl ( $e$ ) при  $p = 3$  и  $r_0 = 0.8R$ :  $a, e$  – зависимости от  $\xi_\pi$  при  $\xi_d = 0$  (кружки),  $\pm 0.6$  (квадраты),  $\pm 1$  (треугольники) и  $\pm 3$  (ромбы);  $b$  – зависимости от  $\xi_d$  при  $\xi_\pi = -0.3$  (кружки),  $-0.7$  (квадраты),  $-1.2$  (треугольники) и  $-2.32$  (ромбы).

скольких градусов. Проигрыш в степени деполаризации при неточной настройке существен только при одновременно больших по модулю обоих параметрах фотоупругой анизотропии и преимущественно обусловлен малостью степени деполаризации для ориентации  $[[A]]$  из-за близости к ней критической ориентации  $[[C_s]]$  [6] и, следовательно, малостью знаменателя в (9).

Спад  $\delta_{[[C]]}$  при  $\xi_\pi < -3$  на кривых, соответствующих  $\xi_d = 3$ , связан с тем, что ориентация  $[[C_s]]$  перестаёт существовать, слившись с  $[[A_s]]$ , которая, как следует из расчётного алгоритма, является оптимальной. В то же время ориентация  $[[C]]$  при  $\xi_s > 1$  продолжает существовать, пока не сольётся с  $[[A]]$ . При этом  $\gamma'_N \approx 1$ . При  $\xi_s < 1$  ориентация  $[[C_s]]$  отклонена от  $[[C]]$  в пространстве углов Эйлера в другую сторону, и  $[[C]]$  исчезает при меньших по модулю  $\xi_\pi$ , чем  $[[C_s]]$ .

### 6. Особые случаи m3m- и m3-кристаллов

Необходимо отметить, что между областями параметров, при которых зависимость степени деполаризации от ориентации при слабом двулучепреломлении определяется только упругими свойствами среды (см.

п.4.2 настоящей работы и п.4.2 в [5]) и преимущественно фотоупругими свойствами (п.4.1 настоящей работы и п.4.1 в [5]), существует переходная зона. При относительно небольшом превышении  $\xi_\pi$  единицы и значительном отличии  $\xi_s$  от неё существенны оба эффекта. Как следует из рис.3,а в [5], при  $\xi_s > 1$  упругие напряжения в диске с ориентацией  $[001]$  больше, чем с остальными простейшими ориентациями. Рост степени деполаризации в окрестности ориентации  $[001]$  может привести к изменению оптимальной ориентации в m3m-кристаллах и при небольших значениях  $|\xi_d|$  – в m3-кристаллах.

Для простоты рассмотрим m3m-кристалл. В приближении слабого двулучепреломления степень деполаризации в тонком диске соотносится с упругоизотропной как

$$\gamma = \gamma^{iso} / Z_{disk}^2 \tag{10}$$

(см. п.5.1 в [3] и п.4.1 в [5]). Поэтому оптимальная интегральная степень деполаризации для ориентации  $[011]$  будет меньше, чем для  $[001]$ , при соблюдении условия

$$R_\gamma(\xi_\pi) < R_z^2(\eta), \tag{11}$$

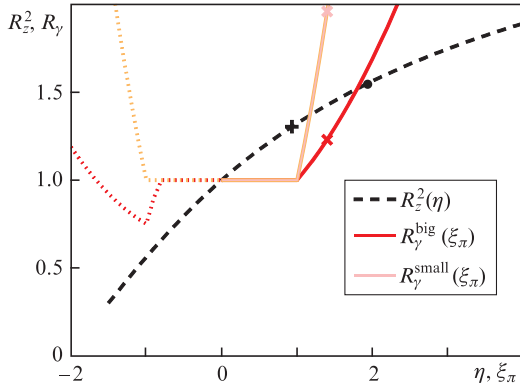


Рис.6. Величины, входящие в неравенство (11). Отмечены значения, использованные для расчета зависимостей на рис.7:  $\xi_\pi = 1.4$  (x),  $\eta(\text{KCl}) = 1.92$  (•) и  $\eta(\text{CaF}_2) = 0.93$  (+).

где

$$R_\gamma(\xi_\pi) = \frac{\gamma_{\text{opt}}^{\text{iso}}([011])}{\gamma_{\text{opt}}^{\text{iso}}([001])}, \quad R_z(\eta) = \frac{Z_{\text{disk}}([011])}{Z_{\text{disk}}([001])},$$

$$\eta = (1 + \nu_{[001]})(\xi_s - 1),$$

в котором упругие и фотоупругие параметры среды разделяются. Величина  $\eta$  была введена в [3] с противоположным знаком. С учётом (32) и (39) из [3]

$$R_z = \frac{1 + 7\eta/16}{1 + \eta/4}. \tag{12}$$

Величина  $R_\gamma$  зависит от радиуса пробного пучка. Для  $r_0 = R$  и  $r_0 \ll R$  соответственно

$$R_\gamma^{\text{big}}(\xi_\pi) = \frac{\min[\xi_\pi^2, G_{[011]}(\xi_\pi)]}{\min[\xi_\pi^2, 1]}, \tag{13}$$

$$R_\gamma^{\text{small}}(\xi_\pi) = \max(\xi_\pi^2, 1),$$

где

$$G_{[011]} = \frac{(1 - \xi_\pi)^2}{8} + \frac{(3 + \xi_\pi)^2}{16}. \tag{14}$$

Величины  $R_z^2$  и  $R_\gamma$  приведены на рис.6. При  $\xi_\pi < 0$  зависимость  $R_\gamma$  представлена пунктиром, т.к. в присутствии критической ориентации ни одна из сравниваемых ори-

ентаций не является оптимальной. Сред с  $\eta < -3/2$  не существует (см. (38) и (93) из [3]).

На рис.7 приведена зависимость степени деполяризации от угла Эйлера  $\beta$  для ориентаций  $[MON]$  и  $[MMN]$  в дисках из модельных  $m3m$ -кристаллов с  $\xi_\pi = 1.4$ ,  $\xi_s \sim 2$ . Для этих сред  $R_\gamma^{\text{big}} < R_z^2 < R_\gamma^{\text{small}}$  (см. рис.6). Для сравнения приведены отмасштабированные с целью примерного совпадения для ориентации  $[001]$  зависимости в упругоизотропном приближении. В то время как в последнем случае оптимальной является ориентация  $[001]$ , в упругоанизотропном решении для широкого пробного пучка (рис.7,б,в) степень деполяризации минимальна для ориентации  $[011]$ , а ориентация  $[001]$  может оказаться наилучшей. При уменьшении радиуса пучка выигрывает от использования ориентации  $[011]$  уменьшается, и оптимальной становится ориентация вида  $[MMN]$ , зависящая от  $\xi_\pi$  и упругих свойств, в которой минимален входящий в формулу (72) из [3] коэффициент  $B_3/Z_{\text{disk}}$ , а степень деполяризации для ориентации  $[001]$  приближается к минимальной (рис.7,а). В целом, в этой области параметров степень деполяризации зависит от ориентации слабо, но качественно зависит от радиуса пучка. В связи с этим оптимальная ориентация труднопредсказуема. С уменьшением параметра упругой анизотропии рассмотренный эффект быстро ослабевает (рис.7,в).

Сравнивая ориентации  $[001]$  и  $[011]$  для длинного стержня, можно получить похожее на (11) соотношение, но оно будет более громоздким, а упругие и фотоупругие свойства среды в нём не будут полностью разделяться. Как следует из рис.3,а в [5], для стержня величина, аналогичная  $R_z$ , как правило, меньше либо незначительно больше единицы, поэтому выполнение данного неравенства в реальных средах маловероятно. В численных расчётах для исследованных нами параметров смены оптимальной ориентации также не происходило. Скорее всего, она будет иметь место при значительно более существенном отличии  $\xi_s$  от единицы. Анализ рис.3,а из [5] показывает, что при  $\xi_s < 1$  уменьшается степень деполяризации для ориентации  $[111]$ , в связи с чем возможна зависимость, похожая на зависимость на рис.7,а. Однако для этого потребуется значение  $\xi_s \sim 0.2$ . Мы не исследовали эту область значений как нехарактерную для известных нам кристаллов.

Похожее поведение степени деполяризации возможно и в  $m3$ -кристаллах. В ситуации, аналогичной рис.7,а, оптимальной будет ориентация общего вида ( $[MNP]$ ). При увеличении радиуса пробного пучка оптимальной станет ориентация, близкая к  $[011]$  и смещённая в сторону  $[[A]]$ .

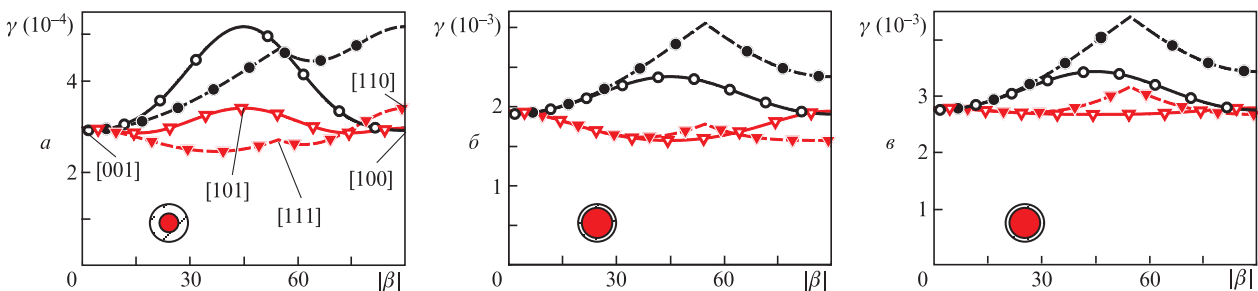


Рис.7. Рассчитанные аналитически оптимальные интегральные степени деполяризации как функции угла Эйлера  $\beta$  для ориентаций  $[MON]$  ( $\alpha = 0$ , сплошные кривые, светлые точки) и  $[MMN]$  ( $\alpha = \pi/4$ , штриховые кривые, закрашенные точки) в модельных кристаллах с  $\xi_\pi = 1.4$  и упругими свойствами как у KCl (а,б) и CaF<sub>2</sub> (в) при  $p = 1$  для тонкого диска (красные треугольники), а также в приближении изотропной упругости (чёрные кружки, зависимости отмасштабированы). Радиусы пробного пучка 0.5R (а) и 0.8R (б, в), простейшие ориентации указаны на рис.а.

## 7. Заключение

В настоящей статье изучена термонаведённая деполяризация лазерного пучка в цилиндрических активных элементах в виде длинного стержня и тонкого диска из монокристаллов кубической сингонии групп симметрии 23 и  $m\bar{3}$  с анизотропным тензором упругой жёсткости при однородной по объёму накачке и боковом теплоотводе. Проанализирована степень термонаведённой деполяризации в зависимости от ориентации. Анизотропия упругих свойств влияет на эту зависимость. Как и для остальных кубических кристаллов, при слабом двулучепреломлении степень деполяризации изменяется на характерную величину порядка десятков процентов, а форма зависимости от ориентации отличается от упругоизотропной по-разному в диске и стержне. Отличие в стержне наиболее выражено при большом значении модуля второго параметра фотоупругой анизотропии.

Как и в остальных кубических кристаллах, существуют три области значений первого параметра фотоупругой анизотропии  $\xi_\pi$ , в которых упругая анизотропия по-разному влияет на выбор оптимальной ориентации. При  $|\xi_\pi| > 1$  и в отсутствие критической ориентации оптимальные ориентации в упругоанизотропном и упругоизотропном расчётах, как правило, различаются на величину порядка нескольких градусов. Как и в упругоизотропном приближении, аналитические оценки оптимальных ориентаций  $[[A]]$ ,  $[[B]]$  и  $[[B\sim]]$  точны только для тонких пробных пучков. Таким образом, для кристаллов групп симметрии 23 и  $m\bar{3}$  оптимальные ориентации смещены относительно как выделенных ориентаций, так и оценок в приближении изотропной упругости.

Рассмотрено также исключение из этого правила для кубических кристаллов любой сингонии. Продемонстрировано возникновение новой оптимальной ориентации, не являющейся выделенной, при сильной анизотропии тензора упругой жёсткости и слабой анизотропии пьезооптического тензора.

При  $0 < \xi_\pi < 1$  и слабом двулучепреломлении оптимальная ориентация определяется упругими свойствами среды, практически не зависит от фотоупругих свойств и близка либо к  $[001]$ , либо к  $[011]$ . При сильном двулучепреломлении степень деполяризации оптимальна для ориентации  $[[B]]$  в диске и для  $[[B\sim]]$  в стержне в случае достаточно большого радиуса пучка, чего нет при  $|\xi_\pi| > 1$ . При большом значении модуля второго параметра фотоупругой анизотропии минимальная степень деполяризации значительно отличается от упругоизотропной.

При  $\xi_\pi < 0$  для кристалла может существовать критическая ориентация, для которой термонаведённая деполяризация в теории обращается в ноль. Положение этой ориентации для диска совпадает с упругоизотропной, а для стержня отклоняется от этого направления. Угол отклонения, как правило, порядка градуса, но резко возрастает при больших по модулю значениях обоих параметров фотоупругой анизотропии.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Е.А.Хазанову за предложенную тему и руководство работой.

Работа поддержана НЦМУ «Центр фотоники» при финансировании Министерством науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2020-906).

## Приложение

### О термонаведённых искажениях пучка в лазерной керамике из упругоанизотропных кубических кристаллов

В настоящий момент аналитические решения задачи упругости в упругоанизотропной лазерной керамике нам неизвестны. Проблема в том, что в поликристаллических средах одновременно требуется непрерывность тензора деформаций  $\mathbf{u}$  (вследствие неразрывности среды) и непрерывность тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  (для выполнения условий механического равновесия). Однако связывающее их материальное уравнение термоупругости (6) из [3] содержит кусочно-постоянный тензорный коэффициент  $\mathbf{s}$  с разрывами на границах гранул [16]. Мы предположили, что решение для керамики устроено более сложно и имеет вариацию как деформаций, так и напряжений в пределах кристаллита. В ходе предварительного численного моделирования на массиве двумерных квадратных гранул с центрами в узлах квадратной решётки такая вариация была продемонстрирована, однако она была сравнительно невелика при умеренных значениях параметра  $\xi_s \sim 2$ . Предварительные расчёты показывают, что наличие этой вариации увеличивает мелкомасштабные термонаведённые искажения пучка в керамике, однако добавка к пространственной вариации диэлектрического тензора [17] также невелика. Более того, поскольку масштаб этой добавочной вариации меньше размера гранул, её вклад в термонаведённые искажения пучка должен быть дополнительно ослаблен (см. также [17]).

К сожалению, грубость использованной расчётной модели не позволяет надеяться на достоверность полученных количественных результатов. Построение аналитической модели в этом случае также будет существенно затруднено статистической зависимостью вариаций упругого и фотоупругого тензоров, а также нелокальностью задачи упругости.

1. Koechner W. *Solid-state Laser Engineering* (Berlin: Springer-Verlag, 1999).
2. Мезенов А.В., Сомс Л.Н., Степанов А.И. *Термооптика твердотельных лазеров* (Л.: Машиностроение, 1986).
3. Вяткин А.Г., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **50**, 114 (2020) [*Quantum Electron.*, **50**, 114 (2020)].
4. Сиротин Ю.И. *Кристаллография*, **1**, 708 (1956).
5. Вяткин А.Г. *Квантовая электроника*, **51**, 565 (2021) [*Quantum Electron.*, **51**, 565 (2021)].
6. Vyatkin A.G., Khazanov E.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **28**, 805 (2011).
7. Мухин И.Б., Палашов О.В., Хазанов Е.А., Иванов И.А. *Письма в ЖЭТФ*, **81**, 120 (2005) [*JETP Lett.*, **81**, 90 (2005)].
8. Най Д. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц* (М.: Иностранная литература, 1960).
9. Khazanov E.A. *Opt. Lett.*, **27**, 716 (2002).
10. Turley J., Sines G. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **4**, 264 (1971).
11. Klopp P., Petrov V., Griebner U., et al. *Opt. Lett.*, **29**, 391 (2004).
12. Peters R., Kränkel C., et al. *Opt. Express*, **15**, 7075 (2007).
13. Baer C.R.E., Kränkel C., Saraceno C.J., Heckl O.H., Golling M., Peters R., Petermann K., et al. *Opt. Lett.*, **35**, 2302 (2010).
14. Александров В.И., Китаева В.Ф., Осико В.В., Соболев Н.Н., Татаринцев В.М., Чистый И.Л. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, № 4, 8 (1976).
15. Nelson D.F., Vedam K., Cook jr W.R. *High Frequency Properties of Dielectric Crystals – Piezooptic and Electrooptic Constants* (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996).
16. Hill R. *Proc. Phys. Soc. A*, **65**, 349 (1952).
17. Vyatkin A.G., Khazanov E.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **29**, 3307 (2012).