

Принцип измерения электронной населенности квантовой точки с помощью однофотонного транзистора на основе массива квантовых точек

А.В.Цуканов

Рассмотрена схема однофотонного транзистора, образованного массивом полупроводниковых одноэлектронных квантовых точек в оптическом резонаторе. Спектральный отклик такого транзистора зависит от кулоновского взаимодействия электронов массива с электроном в измеряемой квантовой точке. Получено приближенное аналитическое выражение для функции отклика транзистора с произвольным числом квантовых точек. На примере одномерного массива (цепочки) анализируются зависимости отклика транзистора от периода цепочки, от расстояния до измеряемой квантовой точки и от степени компенсации кулоновских эффектов. Показано, что существенное влияние на электрон-фотонную динамику транзистора оказывает эффект Ферстера, подавление которого путем чередования квантовых точек с разной симметрией возбужденного состояния значительно увеличивает точность измерения.

Ключевые слова: квантовое измерение, электроны, фотоны, микрорезонаторы, квантовые точки, кулоновское взаимодействие.

1. Введение

Детектирование отдельных электронов и определение их пространственного положения представляет собой важную в практическом отношении задачу. Ее сложность связана с малой величиной элементарного заряда, а также с его высокой мобильностью в кристалле. Тем не менее электроны могут быть локализованы внутри полупроводниковой матрицы в небольших объемах, зонная структура которых отличается от структуры остальной части кристалла благодаря наличию примеси. Такие области, формирующиеся естественным образом в виде нанокристаллитов в арсенид-галлиевых (GaAs) и кремний-германиевых (SiGe) твердых растворах в результате фазового перехода Странского–Крастанова или же создаваемые при помощи внешних электрических полей, называются квантовыми точками (КТ) [1–3]. Электроны, энергия которых меньше величины скачка энергии дна зоны проводимости на границе КТ и кристалла, не могут покинуть КТ без сообщения им дополнительной энергии, компенсирующей эту разницу. Таким образом, создается упорядоченная наноструктура из КТ с контролируемым числом электронов, положение которых в пространстве определяется с погрешностью, задаваемой размерами КТ.

Одноэлектронные устройства находят широкое применение в микро- и наноэлектронике, представляя собой, по существу, последнее поколение приборов, принципы действия которых удовлетворительно описываются в рамках классической теории [4, 5]. Их дальнейшая миниатюризация оказывается невозможной вследствие неделимости элементарного заряда. Кроме того, с уменьшением ха-

рактерных размеров КТ до значений порядка длины волны де Бройля определяющую роль в динамике электронов начинают играть квантовые эффекты. Именно они могут быть положены в основу нового класса приборов, которые функционируют в соответствии с законами квантового мира. К числу таких устройств, прототипы которых уже существуют и тестируются, относятся квантовые биты (кубиты), где электронные состояния КТ используются в качестве логических состояний [6–10]. Другими устройствами нового типа являются высокочувствительные сенсоры электрического поля – одноэлектронный транзистор (ОЭТ) [11] и квантовый точечный контакт [5, 12], внутри которых протекает наноамперный ток, реагирующий на изменения внешнего поля. Эволюция их состояния корректно описывается уравнениями квантовой механики. В большинстве квантово-вычислительных схем на основе КТ кубиты и сенсоры объединяются в структуру, иногда называемую квантовым чипом [13]. Как известно, надежное измерение состояния кубита необходимо для успешного выполнения любого квантового алгоритма [14]. Электрон, находящийся в разных логических состояниях КТ-кубита, по-разному влияет на токовое состояние сенсора. Это делает возможным определение состояния кубита по величине тока через расположенный рядом ОЭТ.

Обладая рядом уникальных характеристик, емкостные сенсоры электрического поля имеют и несколько существенных недостатков. Значительные трудности связаны с изготовлением самой структуры, состоящей из более чем десяти металлических электродов с индивидуальным управлением и сложной геометрией. Не менее серьезную проблему представляет нежелательное взаимодействие тока не только с измеряемым кубитом, но и с соседними кубитами. В качестве альтернативного варианта измерительного устройства нами была предложена модель однофотонного транзистора (ОФТ), в которой сам КТ-кубит играет роль чувствительного элемента, влияющего на пропускную способность фотонной моды волновода

А.В.Цуканов. Физико-технологический институт им. К.А.Валиева РАН, Россия, 117218 Москва, Нахимовский просп., 34; e-mail: a-v-ts@mail.ru

Поступила в редакцию 24 апреля 2021 г., после доработки – 1 июня 2021 г.

[15]. В этом случае фотоны ОФТ (в отличие от электронов ОЭТ) взаимодействуют в режиме ближнего поля только с измеряемым кубитом. Однако пространственное разделение фотонной (измеряющей) и электронной (логической) подсистем оказывается здесь невозможным из-за быстрого убывания энергии их взаимодействия с ростом расстояния между ними. Кроме того, даже при размещении кубита в пучности фотонной моды эта энергия довольно мала и сопоставима с величиной неконтролируемого разброса частот КТ и со скоростями диссипативных процессов, что снижает эффективность измерения кубита.

В настоящей работе рассматривается схема, в которой увеличение чувствительности ОФТ достигается за счет использования в качестве сенсорного элемента не одной КТ, а их упорядоченного массива [16–21]. Измеряемая КТ-кубит располагается вне устройства и электростатически взаимодействует с электронами массива КТ, находящимися в пучностях однофотонного поля волновода или микрорезонатора (МР). Это взаимодействие вызывает кулоновские сдвиги частот переходов в каждой из КТ массива, влияющие, в свою очередь, на эффективность электрон-фотонного взаимодействия между массивом КТ и модой. Таким образом, наличие или отсутствие электрона в измеряемой КТ косвенно регулирует коэффициент прохождения фотонов через ОФТ. Используя экспоненциально-степенную модель для потенциала КТ, мы вычислили как диагональные, так и недиагональные матричные элементы кулоновского взаимодействия электронов в двух произвольных КТ. В приближении субфотонного поля найдено аналитическое выражение для коэффициента прохождения фотонов через массив КТ. Показано, что усиление чувствительности ОФТ за счет увеличения числа КТ возможно лишь при соблюдении условия резонанса частот перехода для большей части КТ и фотонной моды. Это значит, что выбор исходных параметров КТ, определяющих ее индивидуальную частоту, должен учитывать и компенсировать энергетический сдвиг, который связан с другими КТ. Такой сдвиг зависит от структуры массива и положения данной КТ в нем. Электрон в измеряемой КТ вызывает дополнительный сдвиг, нарушающий резонанс частот некоторого числа КТ и моды, изменяя таким образом спектральный отклик ОФТ. Анализируя частотную зависимость отклика, можно установить факт наличия или отсутствия электрона в измеряемой КТ.

2. Модель массива одноэлектронных КТ, взаимодействующих с полем моды фотонной молекулы в установившемся режиме накачки

Стремительное развитие твердотельной нанофотоники, возникшей как самостоятельная дисциплина в первой декаде XXI века, сделало возможным проведение систематических экспериментальных исследований квантовых оптических наноструктур. В результате были разработаны измерительные схемы, позволяющие определять квантовое состояние наноструктуры (например, электронную населенность КТ) путем измерения спектральной зависимости коэффициента прохождения фотонов через МР, который взаимодействует с КТ [22]. Одним из основных параметров, от которых зависит погрешность такого измерения, является энергия взаимодействия КТ и моды МР, играющая роль частоты Раби осцилляций кванта энергии между ними. Чем она больше, тем выше измери-

тельный контраст и отношение сигнала к шуму. Ее величина $\Omega_c = -E_c d / \hbar$ зависит от дипольного момента d КТ и напряженности поля E_c моды МР в области нахождения КТ, а также от их ориентации. Оба параметра имеют ограничения сверху, связанные с фиксированными размерами подсистем. Амплитуда поля (точнее, ее среднеквадратичное значение $E_{\text{rms}} = \sqrt{\langle E_c^2 \rangle} = \sqrt{\hbar \omega_c / (2\epsilon_0 \epsilon V_c)}$, где ω_c – частота МР, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ – диэлектрическая проницаемость полупроводника) оценивается из условия нормировки энергии электрического поля на один фотон:

$$\int \epsilon_0 \epsilon E_c^2 dV = \hbar \omega_c / 2$$

(далее полагаем $\hbar \equiv 1$). Проекцию матричного элемента оператора дипольного момента КТ на направление поляризации поля можно оценить по формуле $d \approx -er$, где r – средний радиус КТ, а e – заряд электрона. Напомним, что частоты подсистем также зависят от их размера. Поэтому увеличение радиуса КТ с целью увеличения дипольного момента будет сопровождаться уменьшением частоты перехода, а уменьшение объема V_c резонатора, повышающее амплитуду поля, в итоге приведет к «выталкиванию» всех мод из МР. Интересно отметить, что практически для всех известных гибридных систем типа резонатор+ атом частота Раби оказывается порядка скорости распада квантового состояния. Как правило, именно их отношение указывает на возможность реализации того или иного режима и поддержание когерентности.

При условии, что для данной системы максимально возможное значение Ω_c достигнуто, дальнейшая оптимизация будет связана с подавлением диссипативных эффектов за счет улучшения качества материала и технологии изготовления. Однако существует и альтернативная стратегия, позволяющая усилить связь между фотоном МР и веществом. Для этого необходимо увеличить число N «атомов» в пучностях моды, что приведет к росту эффективной частоты Раби пропорционально \sqrt{N} . Очевидно, что такое усиление окажется заметным лишь при достаточно большом N : увеличение частоты Раби на порядок требует размещения внутри МР 100 «атомов» вместо одного. Если один из «атомов» используется в качестве квантового бита, то такой подход может оказаться неприемлемым, поскольку добавление других «атомов» приведет к их нежелательному взаимодействию с кубитом. С другой стороны, если структура используется в качестве измерительной системы (квантового электрометра), определяющей наличие или отсутствие электрона в заданной области, то такая оптимизация выглядит очень полезной. Тогда массив «атомов» может рассматриваться как оптически активная сенсорная среда (антенна) при отслеживании перемещения электрона на небольшие расстояния.

Рассмотрим структуру (рис.1), образованную двумя оптическими резонаторами МР 1 и МР 2, между которыми возможен когерентный перенос фотонов. Такие структуры иногда называют фотонными молекулами (ФМ) [23–25]. В качестве входного порта, через который в структуру поступают фотоны, используется МР 1. Массив одноэлектронных КТ, сформированных в пучности поля моды МР 2 (выходной порт), представляет собой квантовую нелинейную среду, которая регулирует фотонный транспорт через структуру. Испускаемые фотоны, несущие информацию о состоянии массива КТ, улавливаются

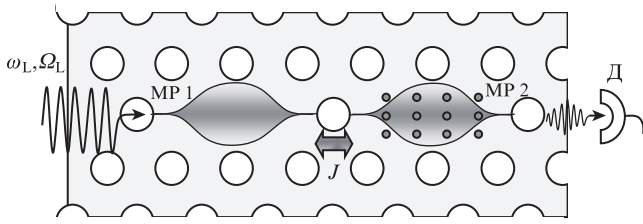


Рис.1. Схема ФМ с пространственно-разделенными входным (MP 1) и выходным (MP 2) портами (дефектами решетки отверстий в двумерном фотонном кристалле). MP 1 и MP 2 связаны за счет фотонного туннелирования со скоростью J . Массив КТ расположен в пучности моды MP 2. Постоянно действующее лазерное излучение с частотой ω_L осуществляет накачку в субфотонном стационарном режиме со скоростью Ω_L . Среднее число прошедших фотонов измеряется фотодетектором Д, расположенным вблизи MP 2.

детектором. Следовательно, варьируя частоту и амплитуду внешнего поля, можно исследовать спектральный отклик электрон-фотонной системы. Данный дизайн обеспечивает пространственное разделение падающих и прошедших фотонов, что увеличивает точность измерения. В зависимости от величин отстроек частот мод ФМ и частот электронных переходов КТ процесс переноса фотонов может осуществляться в резонансном или в дисперсионном режиме.

В настоящей работе мы исследуем одномерный массив (цепочку) КТ, который формируется внутри протяженного линейного дефекта решетки отверстий в двумерном фотонном кристалле. Расстояние a_x между соседними КТ одинаково для всей цепочки. Будем считать, что центр первой КТ цепочки совмещен с началом отсчета, а тестируемая КТ имеет координаты центра L_x, L_y . Лазерное излучение с частотой ω_L фокусируется на поверхности MP 1. Скорость Ω_L поступления фотонов в структуру определяется степенью перекрытия полей моды MP 1 и лазерного излучения, а также его мощностью. Будем считать, что частоты мод MP 1 и MP 2, ω_{c1} и ω_{c2} , достаточно близки, чтобы можно было говорить о возможности фотонного обмена между ними. Скорость J фотонного обмена (туннелирования) пропорциональна интегралу перекрытия электромагнитных полей их мод. Пусть MP 2 содержит N КТ, каждая из которых имеет два электронных состояния (основное и возбужденное). Основное состояние $|g_k\rangle$ КТ с номером k ($k = 1 - N$) имеет энергию ε_{gk} , а ее возбужденное состояние $|e_k\rangle$ – энергию ε_{ek} . Набор частот $\omega_k = \varepsilon_{ek} - \varepsilon_{gk}$ электронных переходов характеризует их спектральную однородность. В качестве модели выберем двумерную КТ, образованную экспоненциально-степенным потенциалом [26],

$$U(x, y) = U_0 \exp[-(x/r_x)^{2p} - (y/r_y)^{2p}], \quad (1)$$

где U_0 – глубина КТ; $2r_{x(y)}$ – длина КТ вдоль направления оси $x(y)$; p – параметр, задающий гладкость потенциала. В качестве единиц измерения используются эффективные атомные единицы: 1 э.а.е. = $Ry^* = m^* Ry / (m_e e^2)$ для энергии и 1 э.а.е. = $a_B^* = a_B m_e \varepsilon / m^*$ для длины, где $Ry = 13.6$ эВ – энергия Ридберга; $a_B = 0.52 \times 10^{-10}$ м – радиус Бора; m_e – масса свободного электрона; m^* – эффективная масса электрона. Для арсенида галлия GaAs ($\varepsilon = 12$ и $m^* = 0.067m_e$) имеем $Ry^* = 6$ мэВ и $a_B^* = 10$ нм. Выберем параметры потенциала КТ (1) следующим образом: $r_x = 0.7$, $r_y = 0.8$, $U_0 = -22$, $p = 5$. Тогда частота перехода между ос-

новным и возбужденным состояниями КТ составляет 9.92 э.а.е.

Энергия кулоновского взаимодействия двух электронов, локализованных в основных состояниях КТ с номерами k и m ,

$$V(g_k, g_m) = 2 \iint d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}_m |\Psi_g(\mathbf{r}_k)|^2 |\Psi_g(\mathbf{r}_m)|^2 / |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m|, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{k(m)}$ – радиус-вектор электрона в КТ $k(m)$. Энергия кулоновского взаимодействия двух электронов, один из которых находится в основном состоянии КТ k , а другой – в возбужденном состоянии КТ m ,

$$V(g_k, e_m) = 2 \iint d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}_m |\Psi_g(\mathbf{r}_k)|^2 |\Psi_e(\mathbf{r}_m)|^2 / |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m|. \quad (3)$$

Матричные элементы (2) и (3) представляют собой диагональные компоненты гамильтониана кулоновского взаимодействия и входят в энергии уровней двухэлектронной системы. Мы не рассматриваем конфигурации с двойным заселением одной КТ, предполагая, что соответствующая добавка к энергии возбужденного уровня будет приводить к выталкиванию его в непрерывный спектр зоны проводимости (ионизации). Вычислим энергии трех возможных двухэлектронных конфигураций: $V(g_k, g_k) = 4.22$, $V(g_k, e_k) = 3.22$, $V(e_k, e_k) = 2.99$. Каждая из них больше энергии ионизации (~ 2.61). Мы также пренебрегаем туннельной связью между соседними КТ, выбирая толщину и высоту разделяющего их барьера достаточно большими. Электроны могут совершать независимые резонансные переходы между состояниями $|g_k\rangle$ и $|e_k\rangle$ k -й КТ, обмениваясь квантом энергии с модой ФМ с частотой Раби Ω_k ($k = 1 - N$). В отсутствие взаимодействия (например, если расстояние между КТ велико по сравнению с их размерами) спектр электрон-фотонной системы представлен набором поляритонных мод Тависа–Каммингса [27]. Его отличие от более известного спектра Джейнса–Каммингса, описывающего частный случай с одной КТ, заключается в том, что состояния электронной подсистемы теперь представлены суперпозициями всех однократно возбужденных состояний КТ массива. При равенстве частот всех КТ только две крайние (верхняя и нижняя) моды являются оптически активными (так называемыми «светлыми»), а оставшиеся $N-2$ моды оказываются «темными», не обнаруживающими себя в ходе спектроскопических измерений.

Будем предполагать, что в структуре присутствует не более одного кванта возбуждения. Тогда гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H = & \omega_{c1} a_1^\dagger a_1 + \omega_{c2} a_2^\dagger a_2 + J(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \\ & + \sum_{k=1}^N \varepsilon_{gk} |g_k\rangle \langle g_k| + \sum_{k=1}^N \varepsilon_{ek} |e_k\rangle \langle e_k| \\ & + \sum_{k>m} V(g_k, g_m) |g_k g_m\rangle \langle g_k g_m| \\ & + \sum_{k>m} V(g_k, e_m) |g_k e_m\rangle \langle g_k e_m| \\ & - \sum_{k=1}^N \Omega_k (|e_k\rangle \langle g_k| a_2 + |g_k\rangle \langle e_k| a_2^\dagger) \\ & + 2\Omega_L \cos(\omega_L t) (a_1^\dagger + a_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь a_1 и a_2 – операторы уничтожения фотона в модах МР 1 и МР 2 соответственно, и при описании обмена энергией между КТ и МР 2 использовано приближение вращающейся волны, предполагающее выполнение условий $\omega_k \gg \Omega_k$. Размерность пространства базисных векторов равна $N+3$. Векторы

$$|1\rangle = |g_1, \dots, g_N\rangle |00\rangle, \quad |2\rangle = |g_1, \dots, g_N\rangle |10\rangle, \\ |3\rangle = |g_1, \dots, g_N\rangle |01\rangle$$

описывают вакуумное состояние электрон-фотонной системы и состояния, отвечающие нахождению одного фотона в модах МР 1 и МР 2 соответственно. Оставшиеся векторы $|k+3\rangle = |g_1, \dots, e_k, \dots, g_N\rangle |00\rangle$ ($k = 1 - N$) описывают возбуждение электрона в k -й КТ. Вектор состояния

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{N+3} c_k |k\rangle$$

системы представляется в виде разложения по базисным векторам с коэффициентами c_k , зависящими от времени. Эволюция вектора состояния подчиняется уравнению Шрёдингера $i\partial_t |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle$ с начальным условием $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$.

Если лазер работает в стационарном режиме, то, применяя преобразование

$$T = \exp\left[-i\omega_L t \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + \sum_{k=1}^N |e_k\rangle\langle e_k|\right)\right]$$

к гамильтониану H , можно исключить его временную зависимость. При этом частоты мод МР и КТ сдвигаются на частоту лазерного излучения ω_L . Кроме того, необходимо учесть некогерентные процессы фотонной диссипации, связанные с неконтролируемым уходом энергии из МР 1 и МР 2 в континуум со скоростями κ_1 и κ_2 , и электронную релаксацию со скоростью γ_k , обусловленную взаимодействием k -й КТ с фоновым окружением. Строгий учет этих явлений возможен лишь в рамках формализма матрицы плотности и уравнения Линдблада (см. ниже), однако приближенное решение, справедливое при небольшой вероятности возбуждения системы из вакуумного состояния, может быть найдено с помощью более простого формализма уравнения Шрёдингера. Для этого в уравнении (4) следует провести замену $\omega_{c1(2)} \rightarrow \omega_{c1(2)} - i\kappa_{1(2)}$ и $\omega_k \rightarrow \omega_k - i\gamma_k$.

Выберем в качестве начала отсчета энергии величину

$$\varepsilon^{(0)} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{gk} + \sum_{m>k} V(g_k, g_m)$$

и введем смещение

$$G_k = \sum_{m \neq k} [V(e_k, g_m) - V(g_k, g_m)]$$

частоты k -й КТ. Этот параметр характеризует неэквивалентность кулоновского взаимодействия электрона в основном и в возбужденном состояниях k -й КТ с электронами остальных КТ, находящихся в основном состоянии. Тогда уравнение Шрёдингера с учетом сделанных выше преобразований оказывается тождественным системе дифференциальных уравнений для амплитуд вероятностей базисных векторов в разложении вектора состояния:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \dots \\ c_{N+3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_L & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Omega_L & \delta_{c1} - i\kappa_1 & J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J & \delta_{c2} - i\kappa_2 & -\Omega_1 & \dots & -\Omega_N \\ 0 & 0 & -\Omega_1 & \delta_1 + G_1 - i\gamma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\Omega_N & 0 & \dots & \delta_N + G_N - i\gamma_N \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \dots \\ c_{N+3} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где определены отстройка $\delta_{c1(2)} = \omega_{c1(2)} - \omega_L$ частоты МР 1(2) и отстройки $\delta_k = \omega_k - \omega_L$ частот переходов в КТ от частоты лазерного излучения. Чтобы рассчитать G_k ($k = 1 - N$) для линейного массива, состоящего из одинаковых КТ, достаточно построить зависимость разности $\Delta V = V(e_k, g_m) - V(g_k, g_m)$ от расстояния между центрами двух КТ. Тогда, зная конфигурацию массива (т. е. координаты центров всех КТ), несложно найти все входящие в уравнение (5) величины.

Получим приближенное решение системы (5) в установившемся (steady-state) режиме субфотонной накачки, когда $c_1 \approx 1$ и $\partial_t c_k = 0$. Этот режим достигается за время $t_{ss} \gg 1/\kappa_2$, превышающее характерное время диссипации фотона. Нас будет интересовать средняя населенность $\langle n_2 \rangle = |c_3(t_{ss})|^2$ моды МР 2, которая определяет коэффициент прохождения, т. е. число фотонов, следующих через ОФТ от источника к детектору. Система из $N+3$ однородных дифференциальных уравнений сводится к неоднородной алгебраической системе из $N+2$ уравнений, решая которую, мы находим выражение для населенности моды МР 2:

$$\langle n_2 \rangle \approx \frac{\Omega_L^2 J^2 |F|^2}{\left| [(\delta_{c1} - i\kappa_1)(\delta_{c2} - i\kappa_2) - J^2] F - (\delta_{c1} - i\kappa_1) \sum_{m=1}^N \Omega_m^2 F_m \right|^2}, \quad (6)$$

где

$$F_m = \prod_{k \neq m}^N (\delta_k + G_k - i\gamma_k), \quad F = \prod_{k=1}^N (\delta_k + G_k - i\gamma_k)$$

– произведения резонансных знаменателей КТ массива. В отсутствие взаимодействия КТ и моды МР 2 ($\Omega_m = 0$) знаменатель выражения (6) имеет два минимума, отвечающие частотам мод ФМ, которые образуются за счет туннелирования фотонов между МР 1 и МР 2 при ненулевом J . Чтобы добиться максимального значения коллективной

частоты Раби, необходимо настроить частоты переходов всех КТ массива в резонанс с частотой одной из мод ФМ. Выберем в качестве такой моды симметричную моду ФМ (при условии, что $\delta_{c1} \approx \delta_{c2}$), имеющую частоту $\omega_{PM-} = \omega_{c2} - J$. Амплитуды обеих мод ФМ в МР 2 оказываются в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитуды моды изолированного МР 2 вследствие перенормировки, связанной с увеличением оптического объема системы в два раза. Следовательно, все частоты Раби также будут меньше величин Ω_k в $\sqrt{2}$ раз. Если отстройка частоты перехода в k -й КТ, вызванная кулоновским взаимодействием с другими КТ, оказывается равной энергии взаимодействия КТ и моды или больше нее, $|G_k| \geq \Omega_k$, то обмен энергией между КТ и модой становится неэффективным. Тем не менее даже в этом случае КТ влияет на транспортные свойства ФМ, генерируя дисперсионный сдвиг частоты моды. Задавая параметры потенциала КТ таким образом, чтобы выполнялось условие $\omega_k = \omega_{PM-} - G_k$, мы компенсируем кулоновскую отстройку, восстанавливая резонансный характер взаимодействия.

Как следует выбрать плотность массива КТ? Чтобы добиться заметного увеличения его влияния на прохождение фотонов по сравнению с одиночной КТ, число КТ N должно удовлетворять условию $\Omega_c \sqrt{N} \geq \kappa_{1,2}$. Это позволит получить высокое разрешение пиков даже при умеренной добротности МР. При этом необходимо принимать в расчет конечность объема моды, вследствие чего увеличение N будет неизбежно связано с уменьшением расстояния между соседними КТ и усилением роли кулоновских эффектов. Кроме того, размеры самого МР определяют его спектр, причем увеличение объема сопровождается уменьшением частот и амплитуд полей мод МР и в этом смысле нежелательно. Наконец, поскольку КТ представляют собой инородные дефекты внедрения по отношению к материалу МР [28], то они будут негативно влиять на его оптические свойства, ухудшая добротность моды. Поэтому суммарный объем всех КТ массива должен быть существенно меньше объема моды: $N\langle V_a \rangle \ll V_c$, где $\langle V_a \rangle$ – средний объем КТ.

3. Роль кулоновских эффектов в установившейся динамике массива КТ

Как мы уже упоминали, в компактных многоэлектронных системах влияние кулоновских эффектов на спектр и на динамику совокупности электронов заметно возрастает с уменьшением расстояния между КТ. Помимо сдвигов энергетических уровней, описываемых диагональными компонентами гамильтониана (4) и обусловленных различием распределений электронной плотности КТ в ее основном и возбужденном состояниях, при сближении КТ на расстояния порядка их радиуса заметную роль начинают играть недиагональные кулоновские матричные элементы. Они определяют скорости динамических процессов, вызывающих переходы между стационарными состояниями системы. Наиболее существенным из них считается когерентный резонансный перенос возбуждения между КТ без перемещения электрона (экситона). Это явление известно как эффект Ферстера [29–31]. Скорость данного процесса задается матричным элементом

$$V_{km}^F = 2 \iint dr_k dr_m \Psi_g^*(r_k) \Psi_g^*(r_m) \Psi_g(r_m) \times$$

$$\times \Psi_e(r_k) / |r_k - r_m|, \quad (7)$$

а соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H_F = \sum_{k \neq m} V_{km}^F |g_k e_m\rangle \langle e_k g_m| + \text{h.c.} \quad (8)$$

Таким образом, ферстеровская динамика представлена двумя синхронными оптическими переходами $|e_k\rangle \rightleftharpoons |g_k\rangle$ в k -й КТ и $|g_m\rangle \rightleftharpoons |e_m\rangle$ в m -й КТ, совершающимися в противоположных направлениях. Данный процесс будет эффективным лишь в случае близости частот переходов в обеих КТ, т.е. когда выполняется условие их резонанса, $|\omega_k - \omega_m| \ll |V_{km}^F|$. Другим кулоновским процессом, энергия которого выражается матричными элементами вида

$$V_{km}^{(g,e,g)} = 2 \iint dr_k dr_m \Psi_g^*(r_k) \Psi_g^*(r_m) \Psi_e(r_k) \times \Psi_g(r_m) / |r_k - r_m|, \quad (9)$$

является переход из возбужденного состояния в основное состояние одной КТ, вызванный полем электрона в другой КТ. Соответствующий гамильтониан следует дополнить эрмитово-сопряженным выражением, описывающим обратный процесс:

$$H_{\text{nondiag}}^{(g,e,g)} = \sum_{k \neq m} V_{km}^{(g,e,g)} |g_k g_m\rangle \langle e_k g_m| + \text{h.c.} \quad (10)$$

В отличие от резонансного энергетического обмена Ферстера, в данном процессе энергия не сохраняется, и поэтому он является виртуальным, приводя лишь к малому сдвигу частот КТ, $|V_{km}^{(g,e,g)} / \omega_{k(m)}| \ll 1$. Зависимости сдвига Штарка частоты ΔV и энергии Ферстера V_F от расстояния между КТ с параметрами, указанными выше, приведены на рис.2. Видно, что модули этих энергий быстро увеличиваются с уменьшением расстояния L между КТ.

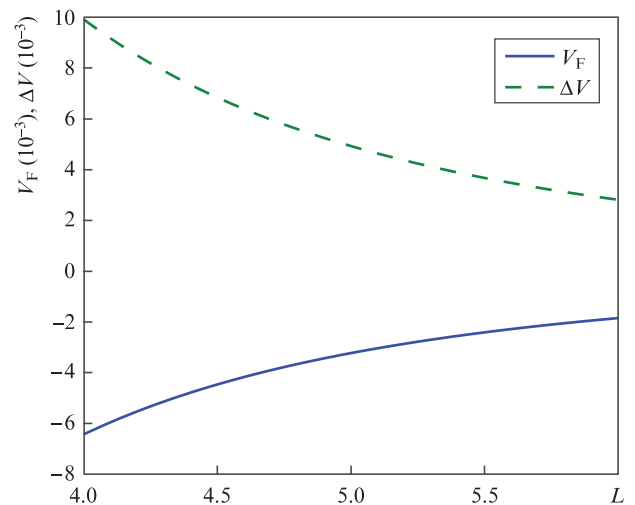


Рис.2. Зависимости энергий Штарка ΔV и Ферстера V_F для двух одинаковых одноэлектронных КТ с параметрами потенциала $r_x = 0.7$, $r_y = 0.8$, $U_0 = -22$, $p = 5$ от расстояния L между центрами КТ. Центры КТ лежат на оси x в плоскости xy , а углы поворота КТ вокруг их аксиальных осей равны нулю. Конфигурация возбужденных орбиталей $p_x - p_x$. Все величины даны в э.е. для арсенида галлия.

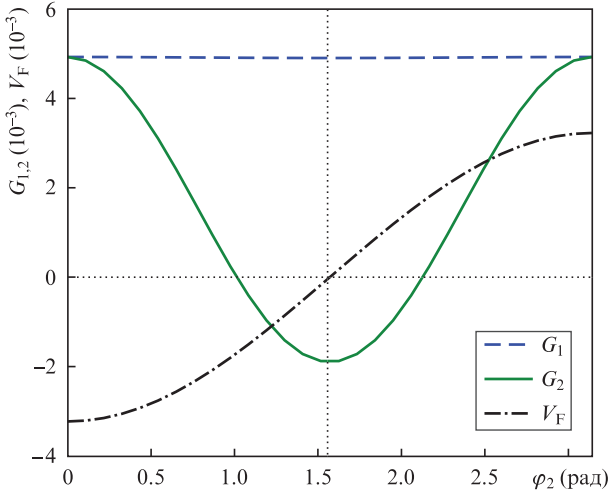


Рис.3. Зависимости штарковских сдвигов КТ 1 (G_1) и КТ 2 (G_2) и энергии Ферстера V_F от угла φ_2 поворота КТ 2 вокруг оси z , проходящей через ее центр, для расстояния $L = 5$ между центрами КТ. Все энергетические величины даны в э. а. е. для арсенида галлия.

Другая особенность матричных элементов связана с их угловыми зависимостями. Если расстояние между КТ фиксировано, а углы φ_1 и φ_2 поворотов КТ вокруг аксиальных осей, проходящих через их центры, варьируются, то и кулоновские энергии также будут меняться. Легко заметить (рис.3), что при повороте на угол $\varphi_2 = \pi/2$ (т.е. при трансформации волновой функции возбужденного состояния p_x КТ 2 в p_y) сдвиг G_2 становится отрицательным, а энергия Ферстера – равной нулю. Следовательно, так можно регулировать их влияние на динамику системы при фиксированном числе КТ и расстоянии между их центрами. В частности, чередуя возбужденные орбитали p_x и p_y соседних КТ в одномерной цепочке, можно в значительной степени подавить эффект Ферстера.

Какова же роль кулоновских эффектов в установившейся динамике ФМ и массива КТ? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо более глубокое исследование, которое требует привлечения формализма матрицы плотности. Динамика электрон-фотонной системы описывается уравнением Линдблада, решение которого дает зависимость ее матрицы плотности ρ от времени, для заданного начального состояния $\rho(0)$:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H + H_F, \rho] + \sum_{k=1}^2 \kappa_k D(a_k) + \sum_{k=1}^N \gamma_k D(|g_k\rangle\langle e_k|) + \sum_{k=1}^N \gamma_{dk} D(|e_k\rangle\langle e_k| - |g_k\rangle\langle g_k|), \quad (11)$$

где γ_{dk} – скорость дефазировки электрона в k -й КТ. Диссипативные фотонные и электронные процессы моделируются операторами Линдблада $D(O) = O\rho O^\dagger - [O^\dagger O, \rho]/2$. Получим решение уравнения (11) для линейной структуры из четырех одноэлектронных КТ в установившемся режиме, находившейся в вакуумном состоянии, полагая, что время действия лазерного излучения превышает время релаксации системы.

Начнем со случая, когда возбужденные орбитали всех КТ ориентированы вдоль оси структуры (конфигурация $p_x-p_x-p_x-p_x$). Для удобства сравнения точного решения с аналитическим приближением (6) приводятся данные для обоих решений (рис.4). Как мы уже выяснили, куло-

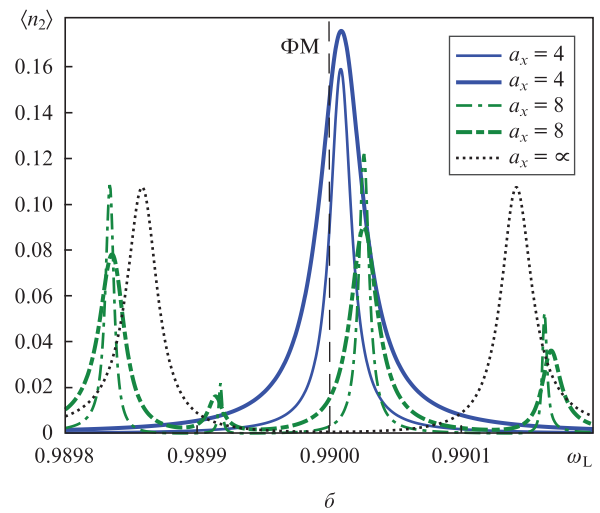
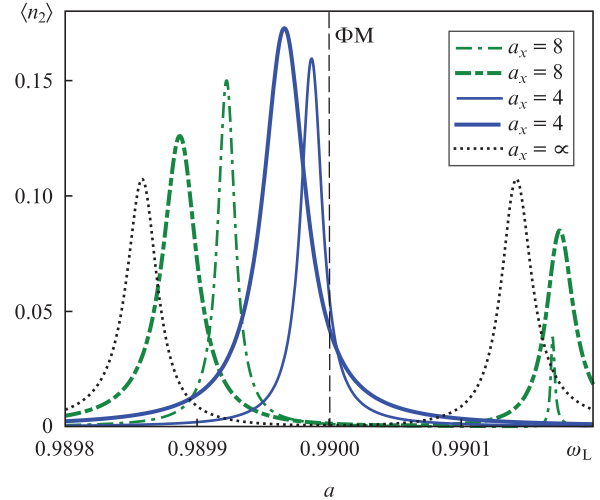


Рис.4. Спектральные отклики ФМ с линейной цепочкой из четырех КТ без компенсации кулоновских сдвигов для двух значений периода цепочки a_x , полученные как путем решения уравнения Линдблада (жирные кривые), так и с использованием приближенной формулы (тонкие кривые). Рассмотрены цепочки с однородной (а) и оптимизированной (б) последовательностью возбужденных орбиталей. Положение четной моды ФМ без КТ отмечено вертикальной штриховой линией. Для сравнения приведена зависимость отклика ФМ с не взаимодействующими (бесконечно удаленными) КТ. Параметры системы: $J = 0.01$, $\Omega_L = 8 \times 10^{-6}$, $\Omega_c = 10^{-3}$, $\delta_{s(2)} = \delta_k = 0$, $\gamma_k = \gamma = 10^{-6}$, $\gamma_{dk} = \gamma_d = 0.5\gamma$, $\kappa_{1,2} = 10^{-5}$. Все энергетические величины даны в единицах частоты МР 1, а расстояния – в э. а. е.

новское взаимодействие вызывает сдвиги частот переходов в КТ, зависящие от ее положения в структуре. Если расстояние между соседними КТ сопоставимо с их размерами, то сдвиги выводят КТ из резонанса с модой ФМ, смещая частоту пика. Логично предположить, что увеличение расстояния приведет к ослаблению кулоновского взаимодействия и постепенному восстановлению резонансной (дублетной) формы спектральной кривой. Результаты вычислений, показанные на рис.4,а, полностью подтверждают это предположение: с увеличением расстояния a_x дублетная структура отклика восстанавливается, а при значительном удалении КТ друг от друга ($a_x > 80$ нм) она стремится к зависимости для ФМ с не взаимодействующими КТ. Сравнение точного численного решения, найденного с учетом недиагональных кулоновских эффектов и дефазировки КТ, с приближенным решением

(6), указывает на некоторое различие частот и ширин резонансных пиков. Чтобы понять, какой из эффектов, не учтенных в уравнении (6), оказывает наибольшее влияние на спектральную кривую, воспользуемся результатом, представленным на рис.3. При повороте одной из КТ на угол $\pi/2$ вокруг своей оси, энергия Ферстера обращается в нуль. Если цепочка формируется путем чередования КТ с возбужденными орбиталями p_x и p_y (конфигурация $p_x - p_y - p_x - p_y$), то ферстеровский обмен энергией между соседними КТ будет подавлен. В этом случае результаты расчетов демонстрируют хорошее соответствие резонансных частот для точного и приближенного решений, указывая на главный источник сдвига частот в однородной цепочке – взаимодействие Ферстера. Дефазировка, вызываемая стохастическими флуктуациями частот переходов в КТ и не учитываемая в приближенном подходе уравнения Шрёдингера, приводит к дополнительному уширению пиков. Вместе с тем для неоднородной цепочки КТ с ростом расстояния a_x появляются еще два резонансных пика, которых нет на зависимостях для однородной цепочки КТ (рис.4,б). Поскольку они присутствуют как на аналитической, так и на расчетной кривой, то их происхождение однозначно связано с диагональными матричными элементами кулоновского взаимодействия.

Воспользовавшись приближением точечных зарядов, вычислим значения G_k в каждой КТ. Для однородной цепочки получаем набор $G_1 = G_4 \approx r_p^2/(2a_x^3)$, $G_2 = G_3 \approx r_p^2/a_x^3$ (в э.а.е., с учетом взаимодействия только соседних КТ). Набор для неоднородной цепочки выглядит так: $G_1 \approx r_p^2/(2a_x^3)$, $G_2 \approx -r_p^2/(2a_x^3)$, $G_3 \approx r_p^2/a_x^3$ и $G_4 \approx -r_p^2/(4a_x^3)$, указывая на более низкую симметрию сдвигов по сравнению с однородной цепочкой. Аналитические значения хорошо согласуются с найденными численно (ср. с рис.2), если положить $r_p \approx r_x/2 = 0.35$ (координата максимума функции $|\Psi_e(x,y)|^2$ на оси x). В случае $a_x = 8$ получаем $G_{1(4)} = 0.0012$, $G_{2(3)} = 0.0025$ для однородной цепочки и $G_1 = 0.0012$, $G_2 = -0.0011$, $G_3 = 0.0025$, $G_4 = -0.0006$ для неоднородной. Поскольку энергетические параметры на рис.4 взяты в единицах частоты ω_{c1} МР 1, то величины G_k необходимо перевести из эффективных атомных единиц в указанные единицы путем умножения на отношение $\omega_{c1}/1$ э.а.е. ≈ 10 . Видно, что данные величины удовлетворяют условиям $|G_k| \geq \Omega_k$, а это говорит о нахождении системы в резонансно-дисперсионном режиме, в котором электрон-фотонный спектр существенно отличается от резонансного спектра модели Тависа–Камминга с двумя «светлыми» состояниями. Однако лишь для неоднородной цепочки все четыре поляритонные моды имеют оптически активную компоненту благодаря асимметрии сдвигов. В следующем разделе мы определим измерительный контраст ФМ и изучим зависимости отклика и контраста от расстояния до тестируемой КТ.

4. Спектральный отклик ФМ с одномерным массивом КТ

Расчеты, проведенные выше, указывают на значительное влияние кулоновских эффектов внутри цепочки КТ на населенность транспортной моды ФМ, пропорциональную среднему числу фотонов на выходе из структуры. Эта же особенность позволяет определить величину заряда в КТ, расположенной вне МР и, следовательно, оптически неактивной. Влияние измеряемой КТ с номером s на k -ю КТ массива выражается в дополнительном

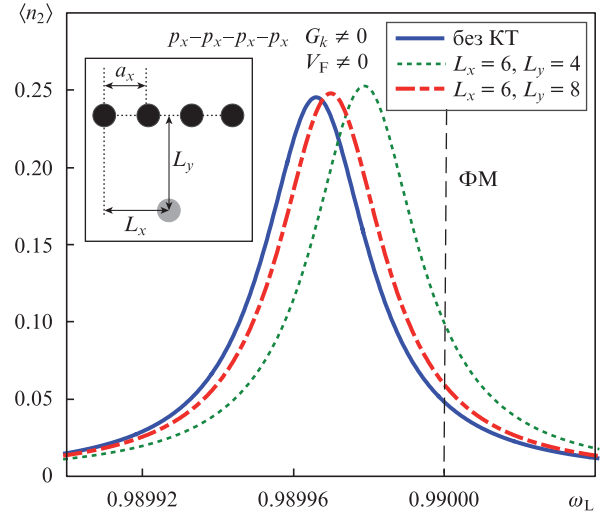


Рис.5. Спектральные отклики ФМ, содержащей цепочку из четырех КТ с периодом $a_x = 4$, для двух положений центра измеряемой КТ (дисперсионный режим). На вставке показана геометрия измерительной схемы. Вертикальная штриховая линия отмечает положение четной моды ФМ без цепочки КТ. Параметры структуры те же, что и для рис.4.

сдвиге ее частоты на δV_{ks} , где $\delta V_{ks} = V(e_k, g_s) - V(g_k, g_s)$. В свою очередь, эти сдвиги частот КТ вызывают смещение пика фотонной населенности, которое легко найти путем сравнения с откликом структуры в отсутствие измеряемой КТ (жирная кривая на рис.5). Определим измерительный контраст следующим образом:

$$S = \max(|\langle n_2^{(0)} \rangle - \langle n_2^{(1)} \rangle|), \quad (12)$$

где $\langle n_2^{(0)} \rangle$ – среднее число фотонов, если в измеряемой КТ нет электронов, а $\langle n_2^{(1)} \rangle$ – среднее число фотонов, если в КТ присутствует один электрон. Максимальное значение разности населенностей моды (12) достигается на частоте спектрального пика ФМ, не взаимодействующей с измеряемой КТ. После умножения на частоту моды величина S будет иметь размерность энергии, что удобно для оценки мощности потока прошедших фотонов, которая важна для выбора расстояния от ФМ до детектора. Ответ на вопрос о том, какое положение измеряемой КТ относительно структуры будет оптимальным, далеко не очевидно. С одной стороны, чем КТ ближе к определенному участку цепочки, тем активнее ее взаимодействие с электронами нескольких ближайших КТ по сравнению с другими (более удаленными) КТ. Это дает возможность еще сильнее подавить электрон-фотонное взаимодействие между модой и такими КТ и тем самым изменить отклик ФМ. С другой стороны, КТ, находящаяся на расстоянии, превышающем характерный размер структуры, в равной степени (но с гораздо меньшей энергией) взаимодействует со всеми КТ массива. Таким образом, первая конфигурация приводит к почти полной оптической блокаде группы КТ, незначительно влияя на оставшуюся часть массива. Для второй конфигурации сдвиги частот во всех КТ приблизительно одинаковы, но малы. Какой из вариантов окажется эффективнее, будет зависеть от остальных параметров системы. Естественными шагами в направлении оптимизации отклика следует считать усиление кулоновского взаимодействия структуры и внешней КТ, а также подавление внутрискруктурных межэлектронных корреляций. Это достигается путем внешнего электростатиче-

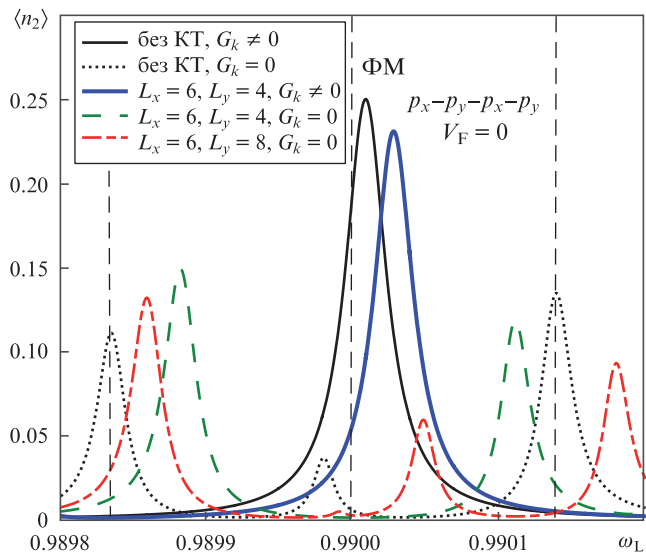


Рис.6. Спектральные отклики ФМ, содержащей цепочку из четырех КТ с периодом $a_x = 4$, для двух положений центра измеряемой КТ (резонансный режим). Вертикальные штриховые линии отмечают положение четной моды ФМ без КТ. Параметры структуры те же, что и для рис.4.

ского управления потенциалом КТ или инженерии процесса роста КТ-кристаллитов с целью подбора таких параметров цепочки, при которых все структурные сдвиги частот КТ в точности компенсируются внутренними кулоновскими сдвигами. При этом восстанавливается резонансный характер взаимодействия с модой ФМ. Другим важным оптимизационным шагом является подавление обмена Ферстера, разрушающего дублетную структуру отклика, путем чередования возбужденных состояний КТ с разной симметрией (рис.6).

На рис.7 показаны зависимости контраста S от положения L_x измеряемой КТ вдоль цепочки для двух значений L_y при различной степени компенсации кулоновских

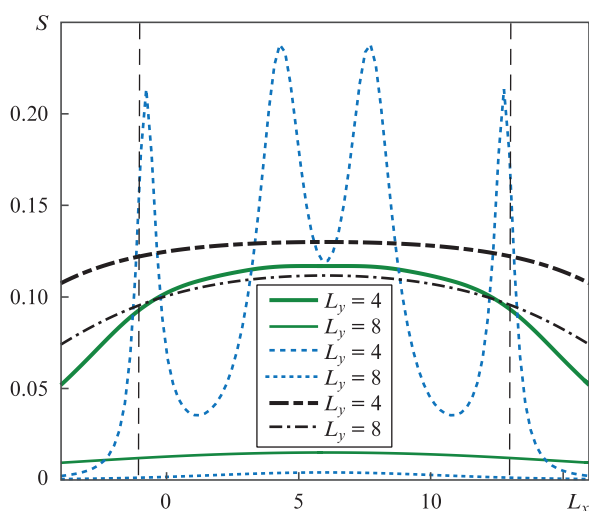


Рис.7. Зависимости измерительного контраста структуры S от горизонтального положения L_x внешней КТ для двух значений ее вертикальной координаты: $L_y = 4$ и 8 . Приведены данные для структур без компенсации внутренних кулоновских эффектов (сплошные кривые), а также с частичной (пунктирные кривые) и полной (штрих-пунктирные кривые) компенсацией. Вертикальные штриховые линии отмечают эффективные границы структуры. Все величины даны в э. а. е.

эффектов. Для структуры без компенсации контраст уменьшается достаточно быстро с увеличением расстояния L_y , в соответствии с зависимостями спектрального отклика, приведенными на рис.5. Если при $L_y = 4$ уровень контраста сопоставим с уровнем самого сигнала, то при $L_y = 8$ он резко снижается, делая описанный метод непрямого измерения малоэффективным. Компенсация частотных сдвигов при сохранении взаимодействия Ферстера значительно улучшает эффективность процедуры для области вблизи цепочки ($1 < L_y < 6$), однако при удалении КТ на расстояние по вертикали $L_y > 8$ контраст опять снижается до нуля. Отметим наличие четырех локальных максимумов для кривой с $L_y = 4$, которые отсутствуют на аналогичных кривых для нескомпенсированного электронного взаимодействия. Следовательно, они связаны с эффектом Ферстера. Как мы уже знаем, компенсация последнего требует разбиения цепочки КТ на две подрешетки, различающиеся ориентацией орбиталей возбужденных состояний (например, p_x для нечетных и p_y для четных номеров КТ). Полная компенсация кулоновского взаимодействия позволяет замедлить снижение контраста с ростом вертикального смещения КТ и увеличить разрешающую способность. Это дает возможность разместить кубит на большем расстоянии, чем для структуры без компенсации.

Для построения координатной зависимости контраста $S(L_x, L_y)$ в полуплоскости воспользуемся формулой (6), применение которой дает корректный результат для цепочек КТ с подавленным ферстеровским взаимодействием и с малыми скоростями дефазировки КТ, связанной главным образом с акустическими фононами. Полученная двумерная картина (рис.8) отражает общую тенденцию – плавное уменьшение контраста при удалении измеряемой КТ от цепочки. Ее нахождение в области $0 < L_x < 4a_x$ гарантирует надежное измерение при значительных вертикальных расстояниях. Напротив, размещение измеряемой КТ на оси x приводит к быстрому снижению контраста уже на небольшом расстоянии от границ цепочки.

Результаты, представленные на рис.7 и 8, позволяют сформулировать общие рекомендации для оптимизации

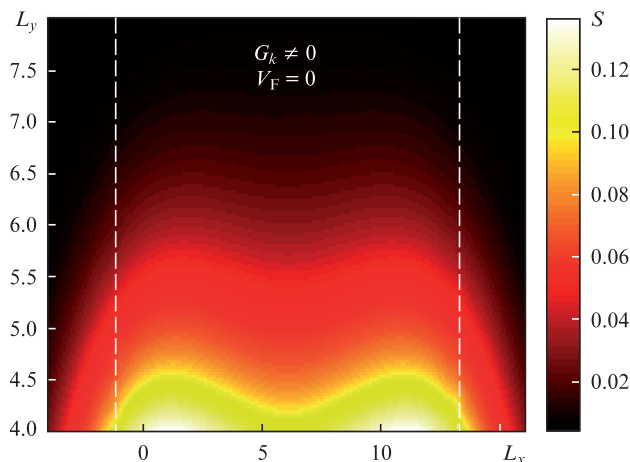


Рис.8. Пространственная зависимость контраста $S(L_x, L_y)$ от координат центра измеряемой КТ без компенсации кулоновских сдвигов частот КТ цепочки. Эффективные границы цепочки обозначены вертикальными штриховыми линиями. Все величины даны в э. а. е.

измерения. Тестируемый объект желательно расположить так, чтобы расстояние до всех КТ цепочки было примерно одинаковым (область на рис.8, ограниченная вертикальными штриховыми линиями). Для сохранения высоких значений контраста при удалении КТ на большое расстояние ($L_y > 10$) необходимо скомпенсировать кулоновские сдвиги частот оптических переходов в КТ цепочки и минимизировать ферстеровское взаимодействие между ними. Компенсация может быть проведена за счет надлежащего выбора формы потенциала КТ и расстояния между соседними КТ в зависимости от их положения в массиве. Она не требует дополнительной инфраструктуры (совокупности электродов-затворов). Иными словами, заполнение всех КТ массива электронами должно восстановить резонанс частот КТ и моды за счет взаимной компенсации структурных и кулоновских сдвигов, равных по величине, но противоположных по знаку. Как нетрудно догадаться, величины кулоновских сдвигов будут больше для КТ, расположенных в центральной области массива, поэтому и расстояние до соседних КТ, и глубины их потенциалов должны быть больше. Однако существует структура, не требующая дополнительной инженерии потенциалов КТ для реализации данного подхода. Речь идет о КТ, равномерно размещенных на окружности. В этом случае благодаря эквивалентности гамилтонианов для каждой КТ их сдвиги частот, обусловленные межэлектронным взаимодействием, будут одинаковыми. Электрон в измеряемой КТ на аксиальной оси, проходящей через центр окружности, также в равной степени влияет на каждую из КТ кольцевого массива. Это должно способствовать синхронному выходу из резонанса с модой всех КТ массива при заселении данной КТ, который будет сопровождаться резким изменением спектрального отклика (восстановлением спектра «пустой» ФМ). В качестве финального замечания укажем на необходимость поддержания условий субфотонного режима, в котором среднее число фотонов моды не превышает единицы [32].

5. Заключение

В настоящей работе анализируется возможность применения однофотонной схемы для спектроскопического мониторинга состояния заряженных нанообъектов. Предложен способ оптического измерения населенности КТ, расположенной на значительном удалении от устройства. Наш метод согласуется со схемой квантового измерения, использующей эффект Джейнса–Каммингса, дополняя ее некоторыми новыми деталями. В частности, доказана необходимость корректного учета кулоновского взаимодействия, когда, кроме штарковских (диагональных) смещений частот КТ, в гамилтониане присутствуют и недиагональные компоненты, описывающие эффект Ферстера. Отклик ФМ (среднее число фотонов на выходе из структуры) зависит от соблюдения условий резонанса массива КТ и транспортной моды ФМ. Увеличение числа КТ приводит к росту энергии коллективного электрон-фотонного взаимодействия, восстанавливая разрешение спектральных линий для ФМ с невысокой добротностью. Однако, если плотность КТ в массиве высокая, то сдвиги Штарка и эффект Ферстера подавляют резонансный обмен квантом между КТ и модой, переводя ОФТ в дисперсионный режим, характеризующийся низкой чувствительностью. Таким образом, существуют пу-

ти оптимизации процесса измерения, связанные со структурной инженерией. В частности, индивидуальный выбор потенциалов КТ и геометрии массива, при котором восстанавливается резонанс частот всех КТ и моды ФМ, обеспечивает максимальный измерительный контраст.

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФТИАН им. К.А.Валиева РАН Минобрнауки РФ по теме №0066-2019-0005 «Фундаментальные исследования в области квантовых вычислений и прикладные разработки твердотельной элементной базы квантовых компьютеров 2019».

- Joyce B.A., Kelires P.C., Naumovets A.G., Vvedensky D.D. *Quantum Dots: Fundamentals, Applications, and Frontiers* (Dordrecht: NATO Science Series, 2003).
- Michler P. *Single Semiconductor Quantum Dots* (Springer, 2009).
- Coe-Sullivan S. *Nat. Photonics*, **3**, 315 (2009).
- Ono Y., Fujiwara A., Nishiguchi K., Inokawa H., Takahashi Y. *J. Appl. Phys.*, **97**, 031101 (2005).
- Gustavsson S., Leturcq R., Ihn T., Ensslin K., Gossard A.C. *J. Appl. Phys.*, **105**, 122401 (2009).
- Fedichkin L., Yanchenko M., Valiev K.A. *Nanotechnology*, **11**, 387 (2000).
- Hayashi T., Fujisawa T., Cheong H.D., Jeong Y.H., Hirayama Y. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 226804 (2003).
- Gorman J., Hasko D.G., Williams D.A. *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 090502 (2005).
- Sherwin M.S., Imamoglu A., Montroy T. *Phys. Rev. A*, **60**, 3508 (1999).
- Tsukanov A.V. *Phys. Rev. A*, **85**, 012331 (2012).
- Barthel C., Kjaergaard M., Medford J., Stopa M., Marcus C.M., Hanson M.P., Gossard A.C. *Phys. Rev. B*, **81**, 161308(R) (2010).
- Simmons C.B., Thalukulam M., Shaji N., Klein L.J., Qin H., Blick R.H., Savage D.E., Lagally M.G., Coppersmith S.N., Eriksson M.A. *Appl. Phys. Lett.*, **91**, 213103 (2007).
- Kimble H. *Nature*, **453**, 1023 (2008).
- Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000).
- Цуканов А.В. *Квантовая электроника*, **51**, 84 (2021) [*Quantum Electron.*, **51**, 84 (2021)].
- Walmsley A. *Science*, **348**, 525 (2015).
- Schneider C., Huggenberger A., Süner T., Heindel T., Strauss M., Göpfert S., Weinmann P., Reitzenstein S., Worschech L., Kamp M., Höfling S., Forchel A. *Nanotechnology*, **20**, 434012 (2009).
- Kiravittaya S., Benyoucef M., Zapf-Gottwick R., Rastelli A., Schmidt O.G. *Appl. Phys. Lett.*, **89**, 233102 (2006).
- Mano T., Nötzel R., Zhou D., Hamhuis G.J., Eijkemans T.J., Wolter J.H. *J. Appl. Phys.*, **97**, 014304 (2005).
- Van Lippen T., Nötzel R., Hamhuis G.J., Wolter J.H. *J. Appl. Phys.*, **97**, 044301 (2005).
- Zhang L., Teng C.-H., Hill T.A., Lee L.-K., Ku P.-C., Deng H. *Appl. Phys. Lett.*, **103**, 192114 (2013).
- Stumpf W.C., Asano T., Kojima T., Fujita M., Tanaka Y., Noda S. *Phys. Rev. B*, **82**, 075119 (2010).
- Morichetti F., Ferrari C., Canciamilla A., Melloni A. *Laser Photonics Rev.*, **6**, 74 (2012).
- Ohta R., Ota Y., Nomura M., Kumagai N., Ishida S., Iwamoto S., Arakawa Y. *Appl. Phys. Lett.*, **98**, 173104 (2011).
- Zhu W., Wang Z.H., Zhou D.L. *Phys. Rev. A*, **90**, 043828 (2014).
- Ciurla M., Adamowski J., Szafran B., Bednarek S. *Physica E*, **15**, 261 (2002).
- Fink J.M., Bianchetti R., Baur M., Göppl M., Steffen L., Filipp S., Leek P.J., Blais A., Wallraff A. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 083601 (2009).
- Xie Z.G., Solomon G.S. *Appl. Phys. Lett.*, **87**, 093106 (2005).
- Lovett B.W., Reina J.H., Nazir A., Briggs G.A.D. *Phys. Rev. B*, **68**, 205319 (2003).
- Nazir A., Lovett B.W., Briggs G.A.D. *Phys. Rev. A*, **70**, 052301 (2004).
- Головинский П.А. *ФТП*, **48**, 781 (2014).
- Englund D., Faraon A., Fushman I., Stoltz N., Petroff P., Vučković J. *Nature*, **450**, 857 (2007).