

Модуляционная неустойчивость двух ТЕ мод тонкой левоориентированной пленки на правоориентированной нелинейной подложке

А.С.Буллер, Ю.В.Зеленецкая, Р.В.Литвинов, Н.Р.Мелихова

Внутримодовые волновые пучки в тонкой левоориентированной пленке на керровской подложке рассмотрены на частоте вблизи нуля групповой скорости моды. Получены четыре связанных $(1 + 1)$ -мерных нелинейных уравнения Шредингера, описывающие взаимодействие вперед и назад распространяющихся пучков с положительными и отрицательными групповыми скоростями. Показано, что фазовая само- и кросс-модуляция при одновременном распространении четырех мод возможна только при строго согласованных возмущениях их постоянных распространения, что обусловлено вкладом пространственно-параметрического смешения. Для различных вариантов распространения только двух волноводных мод выполнен анализ их модуляционной неустойчивости. Исследованы особенности модуляционной неустойчивости, связанные с распространением мод с отрицательными групповыми скоростями.

Ключевые слова: тонкая левоориентированная пленка, волноводные моды, отрицательная групповая скорость, модуляционная неустойчивость.

1. Введение

Современные нанотехнологии позволяют создавать левоориентированные метаповерхности с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями, которые сформированы тонкой левоориентированной пленкой на правоориентированной подложке с положительными диэлектрической и магнитной проницаемостями [1–4]. Исследования новых волноводных свойств таких метаповерхностей в оптическом диапазоне длин волн, в том числе обусловленных нелинейным оптическим откликом, являются актуальными для технических приложений.

Нелинейное волновое уравнение, описывающее распространение электромагнитной волны в объемной правоориентированной среде с нелинейным откликом керровского типа (эффектом Керра), имеет решения в виде плоской волны с фазой, зависящей от ее интенсивности [5–13]. Такая волна может быть неустойчива относительно малых возмущений ее амплитуды как во времени, при отрицательной дисперсии групповых скоростей (аномальной дисперсии), так и в пространстве, при положительном керровском коэффициенте (в самофокусирующей среде). В последнем случае модуляционная неустойчивость приводит к мелкомасштабной самофокусировке однородной волны и в конечном счете к ее распаду на отдельные пучки. Наличие или отсутствие модуляционной неустойчивости тесно связано с существованием светлых или темных солитонов огибающей [10–13].

Модуляционная неустойчивость может развиваться при распространении не только плоских волн, но и ограниченных лазерных пучков в нелинейных объемных средах, в том числе в нелинейных оптических резонаторах и лазерных усилительных системах, а также при распространении поверхностных волн в нелинейных слоистых средах и направляемых мод в нелинейных планарных волноводах и оптических волокнах [10–20]. При этом неустойчивость направляемой моды относительно малых амплитудных возмущений в нелинейном оптическом волноводе или в планарном волноводе с эффектом Керра развивается во времени и при аномальной дисперсии [21–30]. В планарном волноводе с самофокусирующей нелинейностью развитие модуляционной неустойчивости одной волноводной моды возможно и в пространстве, в плоскости волновода [10, 20, 31–38].

Одновременное распространение двух направляемых мод в нелинейном волноводе также сопровождается неустойчивостью их амплитуд относительно малых возмущений. Взаимодействие между модами приводит к тому, что их модуляционная неустойчивость может развиваться при параметрах, соответствующих устойчивому распространению одной моды [12, 13, 39–48].

Исследования модуляционной неустойчивости в нелинейных левоориентированных метаматериалах и содержащих их волноводных структурах значительно расширили представление об условиях ее развития [49–62]. При этом в некоторых случаях эти условия можно считать инвертированными по отношению к условиям развития модуляционной неустойчивости в правоориентированных средах. Например, при распространении только одной волны в левоориентированных средах с нелинейным откликом керровского типа пространственная модуляционная неустойчивость возможна при отрицательном коэффициенте Керра [51], а временная – при положительной дисперсии групповых скоростей [52].

Дисперсионные свойства оптических волноводов, содержащих левоориентированные метаматериалы, каче-

А.С.Буллер, Ю.В.Зеленецкая, Н.Р.Мелихова. Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Россия, 634050 Томск, просп. Ленина, 40

Р.В.Литвинов. Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Россия, 634050 Томск, просп. Ленина, 30; e-mail: litvinov_rv@mail.ru

Поступила в редакцию 16 июля 2021 г., после доработки – 29 сентября 2021 г.

ственно отличаются от свойств обычных правоориентированных волноводов [63–71]. В левоориентированных волноводах, как и в правоориентированных, могут распространяться быстрые волноводные моды с фазовой скоростью, превышающей фазовую скорость плоских волн в объемном материале с параметрами материала пленки. Однако в отличие от правоориентированных волноводов, в левоориентированных могут распространяться и медленные волноводные моды с фазовой скоростью, меньшей фазовой скорости плоских волн в объемном материале пленки. При этом частотная дисперсионная зависимость постоянной распространения быстрой направляемой моды планарного волновода на основе тонкой левоориентированной пленки, правоориентированных покровной среды и подложки может иметь точку, в которой групповая скорость моды обращается в нуль [63, 67, 69–71]. Эта точка делит дисперсионную кривую на две ветви. Одной из них отвечает либо вперед, либо назад распространяющаяся мода с положительной групповой скоростью, совпадающей по направлению с фазовой скоростью, а другой – либо вперед, либо назад распространяющаяся мода с отрицательной групповой скоростью, противоположной по направлению фазовой скорости. Поэтому в общем случае в тонкой левоориентированной пленке на одной частоте вдоль одного направления могут распространяться четыре направляемые моды одного типа [69–71], а не две, как в волноводах на основе правоориентированных материалов [72–76].

Если материал левоориентированного волновода, например подложка [68, 71], имеет нелинейный оптический отклик, то распространение мод одного типа сопровождается не только фазовой само- и кроссмодуляцией, как в обычных правоориентированных волноводах [10, 12, 13, 77–81], но и энергообменом между модами [71]. Развитие пространственной модуляционной неустойчивости при распространении направляемых мод в таком нелинейном планарном волноводе может сопровождаться качественными особенностями, которые до сих пор не рассматривались. В настоящей работе выполнен анализ модуляционной неустойчивости для различных вариантов распространения двух волноводных мод в тонкой левоориентированной пленке на правоориентированной подложке с эффектом Керра на частоте вблизи нуля групповой скорости.

2. Внутримодовые пучки на частоте вблизи нуля групповой скорости

Рассмотрим планарный волновод на основе тонкой левоориентированной пленки и подложки с эффектом Керра (рис.1). Считаем, что частотная дисперсия относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей метаматериала пленки описывается модельными соотношениями, используемыми в работах [50–52, 54, 55, 57, 63, 67–71], и параметрами слоев, принятыми в работах [69–71]. В общем случае световое поле в таком волноводе образовано четырьмя монохроматическими пучками быстрых ТЕ мод с одним и тем же модовым индексом, большим единицы [70, 71]. Частотные дисперсионные зависимости постоянных распространения этих мод имеют точку, в которой групповая скорость моды обращается в нуль [63, 67, 69–71, 82]. Центральная составляющая пространственного спектра первого (второго) пучка – вперед распространяющаяся мода с положительной (отрицатель-

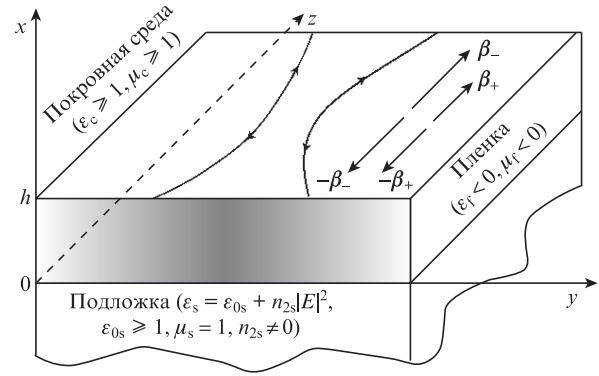


Рис.1. Трехслойный планарный волновод на основе левоориентированной пленки и правоориентированной покровной среды и подложки с эффектом Керра.

ной) групповой скоростью, которой отвечает волновой вектор β_+ (β_-). Центральная составляющая пространственного спектра третьего (четвертого) пучка – назад распространяющаяся мода также с положительной (отрицательной) групповой скоростью, которой отвечает волновой вектор $-\beta_+$ ($-\beta_-$).

В параксиальном приближении y -компоненту вектора электрической напряженности общего светового поля, являющегося суперпозицией четырех внутримодовых пучков, можно представить в следующем виде:

$$E_y(x, y, z) = \sqrt{I_{in}} [\Psi_+(x) C_+^f(y, z) \exp(-i\beta_+ z) + \Psi_+(x) C_+^b(y, z) \exp(i\beta_+ z) + \Psi_-(x) C_-^f(y, z) \exp(-i\beta_- z) + \Psi_-(x) C_-^b(y, z) \exp(i\beta_- z)] + \text{с.с.}, \quad (1)$$

где I_{in} – максимальная интенсивность светового поля в волноводе; $\Psi_+(x)$ и $\Psi_-(x)$ – безразмерные функции, описывающие пространственное распределение поля моды в направлении нормали к пленке (рис.1) для мод с положительной (знак «+») и отрицательной (знак «-») групповыми скоростями [69, 70]; β_+ и β_- – постоянные распространения мод; $C_{\pm}^{f,b}(y, z)$ – безразмерные функции, описывающие пространственное распределение огибающей поля световых пучков в плоскости пленки (зависимость по оси z – медленная, по оси y – быстрая); верхние индексы f и b относятся к вперед и назад распространяющимся модам соответственно.

Используя стандартную процедуру метода медленно меняющихся амплитуд и пренебрегая процессами, не удовлетворяющими условиям фазового синхронизма [12, 13, 45, 72–79], из уравнений Максвелла можно получить следующие уравнения, описывающие взаимодействие рассматриваемых внутримодовых пучков в параксиальном приближении:

$$-i \frac{\partial C_+^f}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_+^f}{\partial \eta^2} + \text{sign} n_{2s} \{ [|C_+^f|^2 + 2|C_+^b|^2 + 2g(|C_-^f|^2 + |C_-^b|^2)] C_+^f + 2g(C_+^b)^* C_-^f \} = 0, \quad (2)$$

$$i \frac{\partial C_+^b}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_+^b}{\partial \eta^2} + \text{sign} n_{2s} \{ [2|C_+^f|^2 + |C_+^b|^2 + 2g(|C_-^f|^2 + |C_-^b|^2)] C_+^b + 2g(C_+^f)^* C_-^b \} = 0, \quad (3)$$

$$-i \frac{\partial C_-^f}{\partial \zeta} + \frac{\delta_\beta}{2} \frac{\partial^2 C_-^f}{\partial \eta^2} - \text{sign} n_{2s} \{ [2g(|C_-^f|^2 + |C_+^b|^2) + g_1(|C_-^f|^2 + 2|C_-^b|^2)] C_-^f + 2g C_+^f C_+^b (C_-^b)^* \} = 0, \quad (4)$$

$$i \frac{\partial C_-^b}{\partial \zeta} + \frac{\delta_\beta}{2} \frac{\partial^2 C_-^b}{\partial \eta^2} - \text{sign} n_{2s} \{ [2g(|C_+^f|^2 + |C_+^b|^2) + g_1(2|C_-^f|^2 + |C_-^b|^2)] C_-^b + 2g C_+^f C_+^b (C_-^f)^* \} = 0, \quad (5)$$

где $\eta = (\beta_+ |\gamma|/2)^{1/2} y$ и $\zeta = |\gamma| z/2$ – нормированные координаты; $\text{sign} n_{2s}$ – знак коэффициента Керра подложки; $\delta_\beta = \beta_+/\beta_-$; аналогично работе [71] введены коэффициенты

$$\gamma = \frac{3 \pi \chi_{3s} I_{in} J_+}{4 \lambda n_+ N_+}, \quad g = \frac{\beta_+ N_+ J_-}{\beta_- N_- J_+}, \quad g_1 = \left(\frac{\beta_+ N_+}{\beta_- N_-} \right)^2 \frac{J_-}{J_+}, \quad (6)$$

интегралы перекрытия

$$J_+ = \int_{-\infty}^0 \Psi_+^4(x) dx, \quad J = \int_{-\infty}^0 \Psi_+^2(x) \Psi_-^2(x) dx, \\ J_- = \int_{-\infty}^0 \Psi_-^4(x) dx \quad (7)$$

и нормировочные интегралы

$$N_+ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_+^2(x)}{\mu(x)} dx, \quad N_- = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_-^2(x)}{\mu(x)} dx \right|; \quad (8)$$

λ – длина волны света в вакууме; $n_+ = \beta_+ \lambda/2\pi$ – эффективный показатель преломления моды с положительной групповой скоростью; χ_{3s} – нелинейная оптическая восприимчивость подложки; $\mu(x)$ – зависимость относительной магнитной проницаемости волновода вдоль нормали к его плоскости (рис.1). Отрицательное значение интеграла под знаком модуля в формуле для N_- учтено непосредственно в уравнениях (4) и (5).

Система уравнений (2)–(5) является системой связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). В случае распространения в волноводе только одного внутримодового пучка (например с отличной от нуля огибающей $C_+^f \neq 0$ при условии $C_+^b \equiv C_-^{f,b} \equiv 0$) соответствующее уравнение (например уравнение (2)) – обычное НУШ [5–38]. При распространении только двух пучков (например с огибающими $C_+^f \neq 0$ и $C_-^f \neq 0$ при $C_+^b \equiv C_-^b \equiv 0$) соответствующие два уравнения (например (2) и (4)) аналогичны системе двух связанных НУШ [12, 13, 39–48]. Распространение трех и более пучков описывается тремя и более связанными НУШ [12, 13, 45, 79–81] (например уравнениями (2)–(4) при условиях $C_+^f \neq 0$, $C_+^b \neq 0$ и $C_-^f \neq 0$ при $C_-^b \equiv 0$), получающимися из системы (2)–(5) приравнением к нулю огибающей отсутствующего пучка.

Отметим, что в рассматриваемом случае взаимодействие четырех мод обусловлено не только фазовой само- и кроссмодуляцией [12, 13, 79–81], вклад которых описывается первыми четырьмя нелинейными слагаемыми в уравнениях (2)–(5), но и параметрическим смешением [12, 13, 45, 77, 78], чей вклад описывается последним нелинейным слагаемым в уравнениях (2)–(5). При этом распространение только одной, двух или трех мод не сопровождается таким смешением. В пренебрежении произ-

водными по y -координате уравнения (2)–(5) описывают взаимодействие не ограниченных в плоскости волновода мод, анализ которого выполнен в работе [71], где показано, что вклад пространственно-параметрического смешения мод приводит к эффективному энергообмену между ними.

Знаки перед нелинейными членами в уравнениях (2) и (3) с эволюционными производными огибающих пучков, образованных модами с положительной групповой скоростью, противоположны знакам перед аналогичными нелинейными членами в уравнениях (4) и (5) с эволюционными производными огибающих пучков, образованных модами с отрицательной групповой скоростью. Эти знаки определяются знаком нелинейного оптического коэффициента подложки n_{2s} . В случае распространения одного пучка с положительной групповой скоростью и огибающей C_+^f (или C_+^b) из уравнения (2) (или (3)) при условиях $C_+^b \equiv C_-^{f,b} \equiv 0$ (или $C_+^f \equiv C_-^{f,b} \equiv 0$) следует, что положительный коэффициент n_{2s} соответствует фокусирующей керровской нелинейности [31–38], а отрицательный – дефокусирующей. В случае распространения пучка с отрицательной групповой скоростью и огибающей C_-^f (или C_-^b) из уравнения (4) (или (5)) при условиях $C_-^b \equiv C_+^{f,b} \equiv 0$ (или $C_-^f \equiv C_+^{f,b} \equiv 0$) следует, что, наоборот, положительный коэффициент n_{2s} соответствует дефокусирующей керровской нелинейности, а отрицательный – фокусирующей.

Эффективность нелинейных процессов, описываемых НУШ (2)–(5), определяется величиной постоянной связи, которая для волноводов со специально легированной стеклянной подложкой с высоким коэффициентом n_{2s} (10^{-19} м²/Вт [77, 78]) может при интенсивности света порядка 10^{15} Вт/м² достигать нескольких десятков обратных сантиметров [71], что соответствует субмиллиметровой эффективной длине взаимодействия волноводных мод.

3. Фазовая само- и кроссмодуляция волноводных мод

Связанные НУШ, анализ которых выполнен в работах [5–13], имеют элементарное решение в виде плоских волн с линейным по эволюционной координате фазовым набегом, пропорциональным интенсивностям волн. Анализ формирования модуляционной неустойчивости этих волн определяет возможность формирования различных типов солитонов огибающей [10–13, 22, 27, 42, 47, 60].

В данном случае аналогом решения в виде плоских волн является решение, отвечающее распространению в рассматриваемом планарном волноводе четырех мод, не ограниченных в плоскости волновода. Такое решение связанных НУШ (2)–(5) можно представить в виде

$$C_{+,-}^f = \mathcal{Y}_{+,-}^f \exp(\mp i b_{+,-}^f \zeta/2), \\ C_{+,-}^b = \mathcal{Y}_{+,-}^b \exp(\pm i b_{+,-}^b \zeta/2), \quad (9)$$

где нормированные возмущения постоянных распространения, описывающие фазовую само- и кроссмодуляцию, должны удовлетворять соотношению

$$b_+^f - b_+^b + b_-^f - b_-^b = \pi n \quad (10)$$

и следующим образом выражаться через амплитуды мод:

$$b_{\pm}^{f,b}/2 = \text{sign}n_{2s} \left\{ (\Gamma_{\pm}^{f,b})^2 + 2(\Gamma_{\pm}^{b,f})^2 + 2g[(\Gamma_{\pm}^f)^2 + (\Gamma_{\pm}^b)^2] \right. \\ \left. + (-1)^n 2g(\Gamma_{\pm}^{b,f} \Gamma_{\pm}^f / \Gamma_{\pm}^{f,b}) \right\}, \quad (11)$$

$$b_{\pm}^{f,b}/2 = \text{sign}n_{2s} 2g[(\Gamma_{\pm}^f)^2 + (\Gamma_{\pm}^b)^2] + g_1 [(\Gamma_{\pm}^{f,b})^2 + 2(\Gamma_{\pm}^{b,f})^2] \\ + (-1)^n 2g(\Gamma_{\pm}^f \Gamma_{\pm}^b \Gamma_{\pm}^{b,f} / \Gamma_{\pm}^{f,b}), \quad (12)$$

где n – целое число. Соотношение (10) приводит к условию связи между нормированными амплитудами мод, которое можно представить в виде

$$\left[1 + (-1)^n 2g \frac{\Gamma_{\pm}^f \Gamma_{\pm}^b}{\Gamma_{\pm}^f \Gamma_{\pm}^b} \right] [(\Gamma_{\pm}^f)^2 - (\Gamma_{\pm}^b)^2] \\ + \left[g_1 + (-1)^n 2g \frac{\Gamma_{\pm}^f \Gamma_{\pm}^b}{\Gamma_{\pm}^f \Gamma_{\pm}^b} \right] [(\Gamma_{\pm}^f)^2 - (\Gamma_{\pm}^b)^2] = n\pi. \quad (13)$$

Согласование амплитуд четырех мод, задаваемое соотношением (13), непосредственно связано со вкладом пространственно-параметрического смещения, которому соответствуют последние нелинейные слагаемые в уравнениях (2)–(5). В случае распространения в рассматриваемом волноводе любых трех, двух или одной моды такое согласование отсутствует, а возмущения постоянных распространения описываются выражениями (11) и (12) после приравнивания к нулю амплитуд отсутствующих мод.

4. Модуляционная неустойчивость одной моды

Как известно, плосковолновое решение, которому в данном случае отвечает формула (9), может быть неустойчиво или устойчиво относительно малых аддитивных возмущений вида $a \exp[i(K\zeta + Q\eta)] + b \exp[-i(K\zeta + Q\eta)]$ амплитуды Γ . Аналогично случаю распространения в керровской среде одной монохроматической волны с постоянной амплитудой [5–13] модуляционная неустойчивость одной волноводной моды (отвечающая комплексным значениям продольного волнового числа возмущений K) с положительной групповой скоростью, например с амплитудным коэффициентом Γ_{\pm}^f ($\Gamma_{\pm}^f = \Gamma_{\pm}^b = 0$) или Γ_{\pm}^b ($\Gamma_{\pm}^f = \Gamma_{\pm}^b = 0$), возможна только при положительном коэффициенте Керра подложки, $n_{2s} > 0$, если амплитуда моды удовлетворяет пороговому условию $(\Gamma_{\pm}^{f,b})^2 > Q^2/4$, определяемому величиной поперечного волнового числа Q . Модуляционная неустойчивость моды с отрицательной групповой скоростью, например с амплитудой Γ_{\pm}^f ($\Gamma_{\pm}^f = \Gamma_{\pm}^b = 0$) или Γ_{\pm}^b ($\Gamma_{\pm}^f = \Gamma_{\pm}^b = 0$), возможна, наоборот, только при отрицательном коэффициенте, $n_{2s} < 0$, если выполняется условие $(\Gamma_{\pm}^{f,b})^2 > (\delta_{\beta} Q^2)/(4g_1)$, которое сводится к предыдущему соответствующей перенормировкой координат ($\eta' = (g_1/\delta_{\beta})^{1/2} \eta$ и $\zeta' = g_1 \zeta$) в уравнении (4) или (5).

Для всех случаев распространения только одной моды дисперсионные зависимости инкремента нарастания амплитудных возмущений $\text{Im}K$ от поперечного волнового числа Q аналогичны обсуждаемым в работах [10–38]. Этот инкремент отличен от нуля в диапазоне $0 < |Q| < 2\Gamma_{\pm}^{f,b}$ и достигает максимального значения $\text{Im}K_{\text{max}} = (\Gamma_{\pm}^{f,b})^2$ при $Q = \sqrt{2} \Gamma_{\pm}^{f,b}$. В размерных единицах максимальный инкремент нарастания возмущений имеет порядок величины постоянной связи $|\gamma|$, которая для приня-

тых выше параметров составляет несколько десятков обратных сантиметров. Это согласуется с длиной мелкоаппаратной самофокусировки $1/|\gamma| \approx 10^{-2}$ см, используемой при обсуждении результатов анализа модуляционной неустойчивости направляемых мод тонкой правоориентированной пленки на нелинейной подложке, выполненного в работе [20]. Отметим, что точное аналитическое описание нелинейной эволюции модуляционной неустойчивости плоской волны в правоориентированных средах, полученное в работах [11, 35], демонстрирует периодичность ее развития вдоль продольной координаты.

5. Модуляционная неустойчивость в случае двух встречно распространяющихся мод с положительными либо отрицательными групповыми скоростями

В этом случае существуют два варианта. Первый соответствует встречному распространению двух мод с положительной групповой скоростью ($\Gamma_{\pm}^f \neq 0$ и $\Gamma_{\pm}^b \neq 0$ при $\Gamma_{\pm}^f = \Gamma_{\pm}^b = 0$), а второй – встречному распространению двух мод с отрицательной групповой скоростью ($\Gamma_{\pm}^f \neq 0$ и $\Gamma_{\pm}^b \neq 0$ при $\Gamma_{\pm}^f = \Gamma_{\pm}^b = 0$).

Следуя методике линейного анализа устойчивости [10–62], рассмотрим аддитивные возмущения амплитудных коэффициентов волноводных мод $\Gamma_{\text{down}}^{\text{up}}$ (up и down – соответствующие рассматриваемому случаю верхние и нижние индексы в (9)) вида

$$u_{\text{down}}^{\text{up}}(\eta, \zeta) = a_{\text{down}}^{\text{up}} \exp[i(K\zeta + Q\eta)] \\ + b_{\text{down}}^{\text{up}} \exp[-i(K\zeta + Q\eta)]. \quad (14)$$

После линеаризации относительно амплитуд возмущений $a_{\text{down}}^{\text{up}}$ и $b_{\text{down}}^{\text{up}}$ уравнений (2) и (3) ((4) и (5)), описывающих в первом (втором) варианте при условиях $C_{\pm}^f \equiv C_{\pm}^b \equiv 0$ ($C_{\pm}^f \equiv C_{\pm}^b \equiv 0$) распространение мод только с положительной (отрицательной) групповой скоростью, нетрудно получить биквадратное уравнение для продольного волнового числа K . Его решение можно представить в виде

$$K_{1,2}^2 \frac{2}{Q^2} = \frac{Q^2}{2} \mp \text{sign}n_{2s} [(\Gamma_{\pm}^f)^2 + (\Gamma_{\pm}^b)^2] \\ \mp \sqrt{(\Gamma_{\pm}^f)^4 + 14(\Gamma_{\pm}^f \Gamma_{\pm}^b)^2 + (\Gamma_{\pm}^b)^4}, \quad (15)$$

где верхний знак перед функцией $\text{sign}n_{2s}$ отвечает первому варианту, а нижний – второму. При этом для обоих вариантов верхний и нижний знаки перед квадратным корнем отвечают первому, K_1^2 , и второму, K_2^2 , корням биквадратного уравнения соответственно.

Отметим, что отсутствие параметров δ_{β} и g_1 в последней формуле, присутствующих в упрощенных для второго варианта НУШ (4) и (5), связано с допустимой перенормировкой координат ($\eta' = (g_1/\delta_{\beta})^{1/2} \eta$ и $\zeta' = g_1 \zeta$), никак не сказывающейся на наличии или отсутствии модуляционной неустойчивости в этом варианте распространения мод.

Из соотношения (15) следует, что модуляционная неустойчивость, которой отвечают комплексные значения продольного волнового числа возмущений K , возможна для обоих вариантов при любом знаке коэффициента n_{2s} ,

если выполнено следующее условие для амплитудных коэффициентов:

$$\{[(r_{\pm}^r)^2 + (r_{\pm}^b)^2]^2 + 12(r_{\pm}^r r_{\pm}^b)^2\}^{1/2} \pm \text{sign} n_{2s} [(r_{\pm}^r)^2 + (r_{\pm}^b)^2] > \frac{Q^2}{2}. \tag{16}$$

Это условие связывает интенсивности мод, пропорциональные квадратам амплитудных коэффициентов, с поперечным волновым числом амплитудных возмущений, так же как и в случае распространения в пленке только одной моды.

Дисперсионные зависимости нормированного инкремента усиления возмущений $\kappa = |\text{Im}(K/\Gamma_+^r)|$ от нормированного поперечного волнового числа возмущений $q = Q/\Gamma_+^r$, характеризующие наличие модуляционной неустойчивости двух встречно распространяющихся мод тонкой левоориентированной пленки с положительными групповыми скоростями при положительном, $n_{2s} > 0$, и отрицательном, $n_{2s} < 0$, коэффициентах Керра подложки показаны на рис.2 сплошными и штриховыми кривыми соответственно для различных отношений амплитудных коэффициентов мод δ_{γ} . В данном случае инкремент нарастания неустойчивости больше для положительного коэффициента n_{2s} . При этом инкремент для $n_{2s} > 0$ и $\delta_{\gamma} = 0$ равен инкременту для $n_{2s} < 0$ и $\delta_{\gamma} = 1$. Очевидно, что в случае двух встречно распространяющихся мод с отрицательными групповыми скоростями сплошные (штриховые) кривые будут отвечать, наоборот, отрицательному (положительному) коэффициенту Керра. Таким образом, условия развития модуляционной неустойчивости двух мод с отрицательной групповой скоростью являются инвертированными по отношению к условиям ее развития для двух мод с положительной групповой скоростью.

Из рис.2 и формулы (16) следует, что и в первом и во втором варианте условие модуляционной неустойчивости выполняется при меньшей суммарной интенсивности мод для того знака коэффициента Керра подложки, для

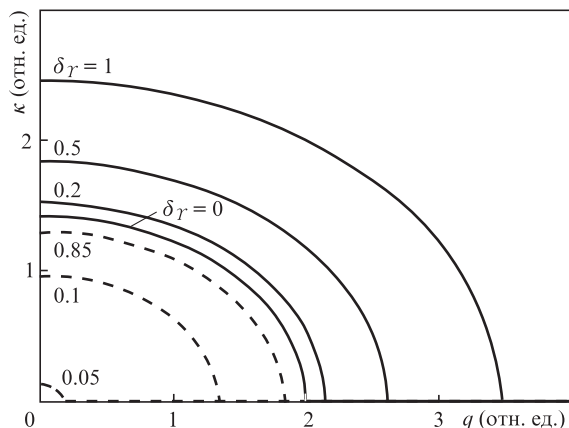


Рис.2. Дисперсионные зависимости инкремента нарастания $\kappa(q)$ модуляционной неустойчивости двух встречно распространяющихся мод тонкой левоориентированной пленки с положительными групповыми скоростями для положительного ($n_{2s} > 0$, сплошные кривые) и отрицательного ($n_{2s} < 0$, штриховые) коэффициентов Керра подложки при различных отношениях амплитудных коэффициентов мод δ_{γ} . Кривая для $n_{2s} > 0$ и $\delta_{\gamma} = 0$ сливается с кривой для $n_{2s} < 0$ и $\delta_{\gamma} = 1$.

которого оно может быть выполнено при распространении в волноводе только одной моды.

6. Модуляционная неустойчивость в случае попутно распространяющихся мод с противоположными знаками групповых скоростей

Этот случай соответствует вперед или назад распространяющимся модам, одна из которых имеет положительную групповую скорость, а другая – отрицательную, например вперед распространяющимся модам с противоположными знаками групповых скоростей ($\Gamma_+^r \neq 0$, $\Gamma_-^r \neq 0$ и $\Gamma_+^b = \Gamma_-^b = 0$). Аналогично предыдущему случаю (разд.5) соотношение для квадрата продольного волнового числа амплитудных возмущений (см. (15)) мод нетрудно получить из НУШ (2) и (4) при условиях $C_+^b \equiv C_-^b \equiv 0$ после их линеаризации относительно амплитуд возмущений $a_{\text{down}}^{\text{up}}$ и $b_{\text{down}}^{\text{up}}$ в следующем виде:

$$K_{1,2}^2 \frac{2}{Q^2} = \frac{1 + \delta_{\beta}^2}{4} Q^2 + \text{sign} n_{2s} [\delta_{\beta} g_1 (\Gamma_-^r)^2 - (\Gamma_+^r)^2] \pm \left\{ \frac{(1 - \delta_{\beta}^2)^2}{16} Q^4 - \text{sign} n_{2s} \frac{1 - \delta_{\beta}^2}{16} [(\Gamma_+^r)^2 + \delta_{\beta} g_1 (\Gamma_-^r)^2] + (\Gamma_+^r)^4 - 2\delta_{\beta} (8g^2 - g_1) (\Gamma_+^r \Gamma_-^r)^2 + \delta_{\beta}^2 g_1^2 (\Gamma_-^r)^4 \right\}^{1/2}, \tag{17}$$

где верхний и нижний знаки перед квадратным корнем отвечают первому и второму корням биквадратного уравнения соответственно.

Как следует из последнего соотношения, для принятых условий наличие модуляционной неустойчивости определяется не только интенсивностями мод и поперечным волновым числом Q , но и отношением постоянных распространения волноводных мод δ_{β} , а также параметрами g и g_1 , описывающими влияние различия пространственных распределений мод на их перекрытие в нелинейной подложке (ср. с (15)).

Вблизи частоты, соответствующей нулю групповой скорости, величины δ_{β} , g и g_1 близки к единице ($g_1 < g < \delta_{\beta} < 1$) [71, 82]. Из формулы (15) следует, что небольшое отклонение коэффициентов g и g_1 от единицы приводит только к малозаметным количественным изменениям зависимостей продольного волнового числа K от поперечного числа Q . В то же время даже небольшое отклонение от единицы отношения постоянных распространения волноводных мод δ_{β} может значительно изменить качественный характер этих зависимостей. Отметим, что при $\delta_{\beta} = g_1 = g = 1$ подкоренное выражение в формуле (17) может принимать отрицательные значения, в отличие от подкоренного выражения в формуле (15), которое всегда положительно.

В пренебрежении различием постоянных распространения мод справедливо строгое равенство $\delta_{\beta} = 1$, при соблюдении которого волновое число K будет комплексным для любого вещественного Q и любого знака коэффициента Керра подложки n_{2s} , если выполняется условие

$$2 - \sqrt{3} \approx (2g/g_1) - \sqrt{(2g/g_1)^2 - 1} < \delta_{\gamma} < (2g/g_1) +$$

$$+ \sqrt{(2g/g_1)^2 - 1} \approx 2 + \sqrt{3}, \tag{18}$$

накладываемое на отношение амплитудных коэффициентов $\delta_\gamma = \Gamma_-^f / \Gamma_+^f$. Зависимости нормированного инкремента усиления возмущений κ от нормированного поперечного волнового числа возмущений q , характеризующие наличие модуляционной неустойчивости для $n_{2s} > 0$, $g_1 = g = 1$, показаны на рис.3,а. Поскольку при $\delta_\beta = g_1 = g = 1$ подкоренное выражение в формуле (17) может принимать отрицательные значения независимо от величины поперечного волнового числа, то в данном случае отсутствует пороговое условие (аналогичное неравенству (16)), накладываемое на интенсивности мод и величину поперечного волнового числа. При этом инкремент κ увеличивается с ростом отношения δ_γ в рассматриваемом диапазоне.

Если же при $\delta_\beta = 1$ отношение интенсивностей δ_γ лежит в диапазоне $0 < \delta_\gamma < (2g/g_1) - \sqrt{(2g/g_1)^2 - 1} \approx 2 - \sqrt{3}$, то модуляционная неустойчивость также реализуется при выполнении порогового условия, которое для обоих знаков коэффициента n_{2s} может быть представлено в виде

$$[(\Gamma_+^f)^4 - 2(8g^2 - g_1)(\Gamma_+^f \Gamma_-^f)^2 + g_1^2(\Gamma_-^f)^2]^{1/2} + \text{sign}n_{2s}[(\Gamma_+^f)^2 - (\Gamma_-^f)^2] > \frac{Q^2}{2}. \tag{19}$$

На рис.3,б представлены дисперсионные зависимости $\kappa(q)$ для величин δ_γ из последнего диапазона. Характерно, что в этом случае, в отличие от случая, соответствующего рис.3,а, инкремент κ , наоборот, уменьшается с ростом отношения δ_γ . Если величина δ_γ удовлетворяет неравенству $\delta_\gamma > (2g/g_1) + \sqrt{(2g/g_1)^2 - 1} \approx 2 + \sqrt{3}$, то моды, распространяющиеся в пленке с противоположными направлениями групповых скоростей, не подвержены модуляционной неустойчивости.

На рис.3,в и г приведены зависимости $\kappa(q)$, рассчитанные для параметров $g_1 = g = 1$ (в пренебрежении различием пространственных распределений мод) и отношения $\delta_\beta = 0.99$, учитывающего небольшое различие постоянных распространения вперед распространяющихся мод с противоположными направлениями групповых скоростей на частоте вблизи нуля групповой скорости [69–71, 82]. Из сравнения кривых на рис.3,а и в при одинаковой величине $\delta_\gamma = 0.4$ следует, что при отклонении от единицы отношения δ_β диапазон значений поперечного волнового числа, при котором развивается модуляционная неустойчивость, становится конечным. Другое качественное изменение зависимостей $\kappa(q)$, связанное с отклонением от единицы отношения δ_β , следует из сравнения кривых на рис.3,б и г при $\delta_\gamma = 0.22$. Это отклонение приводит к тому, что с ростом поперечного волнового числа появляется еще одна область, где развивается модуляци-

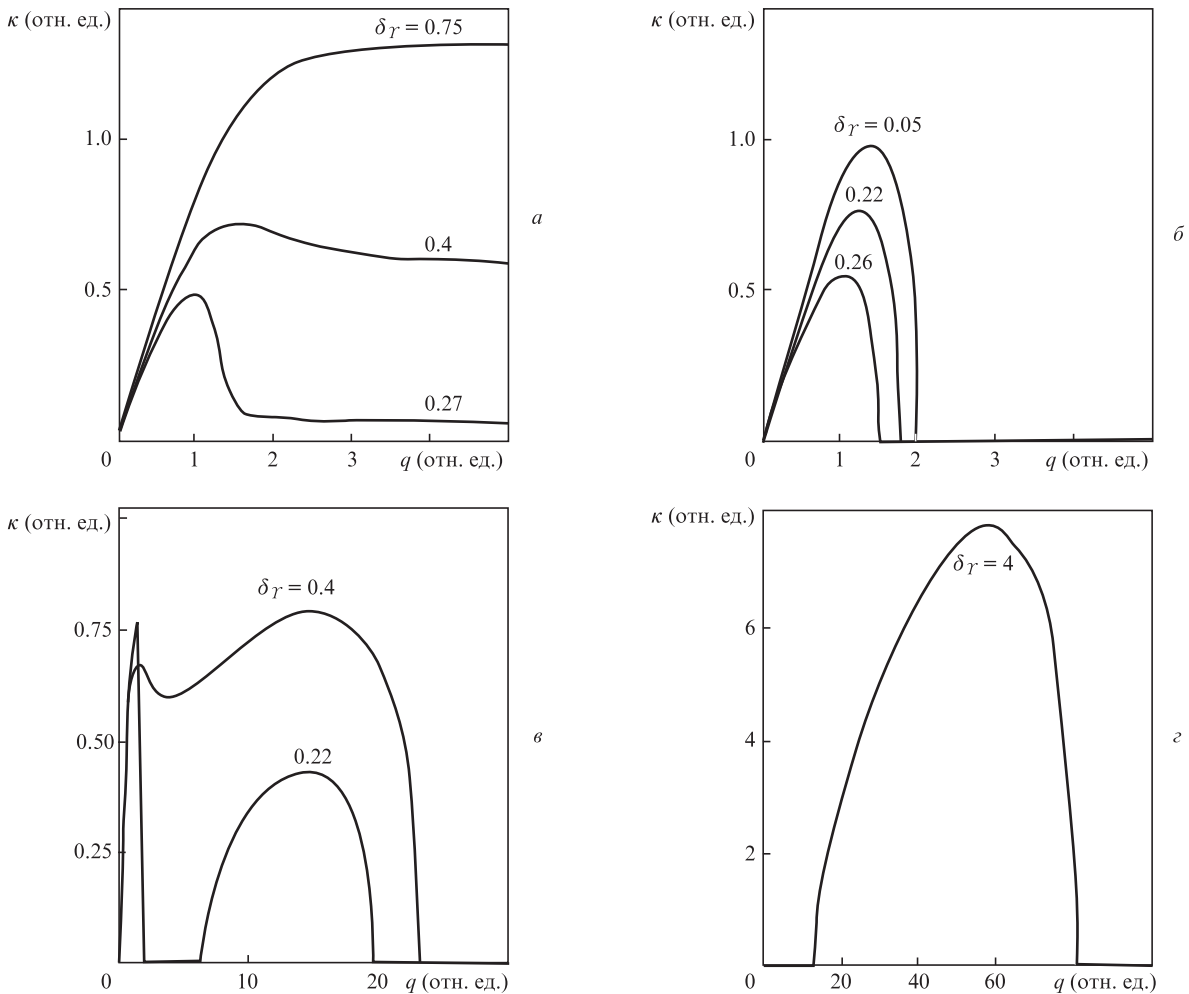


Рис.3. Дисперсионные зависимости $\kappa(q)$, характеризующие модуляционную неустойчивость двух вперед распространяющихся мод тонкой левоориентированной пленки, в случае противоположных знаков групповых скоростей мод и положительного коэффициента Керра подложки для $\delta_\beta = g_1 = g = 1$ (а, б) и $\delta_\beta = 0.99$, $g_1 = 0.98$, $g = 0.97$ (в, г) при различных δ_γ .

онная неустойчивость. Еще одна качественная особенность, обусловленная отклонением от единицы отношения δ_β , заключается в наличии области модуляционной неустойчивости на рис.3,з при отношении амплитудных коэффициентов $\delta_\gamma = 4$, для которого, как указывалось выше, при строгом равенстве $\delta_\beta = 1$ модуляционная неустойчивость отсутствует.

Отметим, что наличие модуляционной неустойчивости при встречном распространении двух мод, одна из которых имеет положительную групповую скорость, а другая – отрицательную, следует из НУШ (2) и (5) при условиях $C_+^b \equiv C_-^f \equiv 0$. В этом случае условия развития модуляционной неустойчивости полностью аналогичны рассмотренным в данном разделе.

7. Заключение

Таким образом, наличие модуляционной неустойчивости быстрых ТЕ мод тонкой левоориентированной пленки на правоориентированной подложке с эффектом Керра на частоте вблизи нуля их групповой скорости может быть установлено на основе анализа решений четырех связанных НУШ. Решение этих уравнений, аналогичное плосковолновому решению нелинейного волнового уравнения для объемной среды, может быть получено в общем случае двух вперед распространяющихся мод с положительной и отрицательной групповыми скоростями и двух назад распространяющихся мод также с положительной и отрицательной групповыми скоростями. Одновременное распространение всех четырех волноводных мод сопровождается не только возмущением их постоянных распространения, зависящих от интенсивностей мод, но и требует согласования амплитудных коэффициентов мод. Это требование непосредственно связано со вкладом пространственно-параметрического смещения, присутствующего при одновременном распространении всех четырех мод. В случае распространения любых трех, двух или одной моды такое согласование отсутствует.

При распространении только одной моды ее модуляционная неустойчивость возможна как при положительном коэффициенте Керра подложки, если мода имеет положительную групповую скорость, так и при отрицательном коэффициенте, если мода имеет отрицательную групповую скорость. В обоих случаях условия развития модуляционной неустойчивости, определяемые по наличию мнимой части у продольного волнового числа амплитудных возмущений моды, являются одинаковыми и связывают интенсивность моды с поперечным волновым числом этих возмущений. При заданной интенсивности моды ее модуляционная неустойчивость возможна в ограниченном интервале поперечных волновых чисел.

На частоте вблизи нуля групповой скорости моды существуют два варианта встречно распространяющихся мод с одинаковыми знаками групповых скоростей. Один из них соответствует распространению мод с положительными групповыми скоростями, а другой – с отрицательными. В каждом из вариантов модуляционная неустойчивость может развиваться при любом знаке коэффициента Керра подложки. При этом условия ее развития, связывающие интенсивности мод с поперечным волновым числом амплитудных возмущений, можно считать инвертированными по отношению друг к другу по своему качественному характеру. Отметим, что в случае первого (второго) варианта развитие модуляционной неустойчи-

вости для положительного (отрицательного) коэффициента Керра возможно при меньшей суммарной интенсивности волноводных мод, чем для отрицательного (положительного) коэффициента.

В случае попутно или встречно распространяющихся мод с противоположными знаками групповых скоростей условия развития модуляционной неустойчивости зависят не только от интенсивностей мод и поперечного волнового числа возмущений, но и от различия в постоянных распространения волноводных мод. Это различие оказывает сильное влияние на дисперсионные зависимости продольного волнового числа от поперечного и может изменить их качественный характер. При этом модуляционная неустойчивость может развиваться при любом знаке коэффициента Керра подложки для поперечных волновых чисел возмущения либо из одной непрерывной области, либо из двух разделенных областей, в зависимости от отношения амплитудных коэффициентов мод.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТПУ.

1. Kivshar Yu. *Natl. Sci. Rev.*, **5**, 144 (2018).
2. Li G., Zhang S., Zentgraf T. *Nat. Rev. Mater.*, **2**, 14 (2017).
3. Glybovski S.B., Tretyakov S.A., Belov P.A., Kivshar Yu.S., Simovski C.R. *Phys. Rep.*, **634**, 1 (2016).
4. Lapine M., Shadrivov I., Kivshar Yu. *Rev. Mod. Phys.*, **86**, 1093 (2014).
5. Беспалов В.И., Таланов В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **3**, 471 (1966) [*JETP Lett.*, **3**, 307 (1966)].
6. Островский Л.А. *ЖЭТФ*, **51**, 1189 (1966) [*JETP*, **24**, 797 (1967)].
7. Карпман В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **6**, 829 (1967) [*JETP Lett.*, **6**, 277 (1967)].
8. Гурович В.Ц., Карпман В.И. *ЖЭТФ*, **56**, 1952 (1969) [*JETP*, **29**, 1048 (1969)].
9. Kolokolov A.A. *Lettere AL Nuovo Cimento*, **8**, 197 (1973).
10. Rosanov N.N. *Progress in Optics*, **35**, 1 (1996).
11. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. *Нелинейные импульсы и пучки* (М.: Физматлит, 2003).
12. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. *Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам* (М.: Физматлит, 2005).
13. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М.: Мир, 1996).
14. Розанов Н.Н., Смирнов В.А. *ЖЭТФ*, **70**, 2060 (1976) [*JETP*, **43**, 1075 (1976)].
15. Розанов Н.Н., Смирнов В.А. *Квантовая электроника*, **5**, 2538 (1978) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **8**, 1429 (1978)].
16. Розанов Н.Н., Смирнов В.А. *Квантовая электроника*, **17**, 1340 (1990) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **20**, 1250 (1990)].
17. Розанов Н.Н., Смирнов В.А. *Квантовая электроника*, **7**, 410 (1980) [*Sov. J. Quantum Electron.*, **10**, 232 (1980)].
18. Розанов Н.Н. *Оптика и спектроскопия*, **48**, 338 (1989).
19. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Смирнов В.А. *ЖТФ*, **57**, 173 (1987).
20. Vysotina N.V., Rosanov N.N., Smirnov V.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **7**, 1281 (1990).
21. Hasegawa A., Brinkman W.F. *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 694 (1980).
22. Hasegawa A. *Opt. Lett.*, **9**, 288 (1984).
23. Anderson D., Lisak M. *Opt. Lett.*, **9**, 468 (1984).
24. Hermansson B., Yevick D. *Opt. Commun.*, **52**, 99 (1984).
25. Tajima K. *J. Lightwave Technol.*, **4**, 900 (1986).
26. Hasegawa A., Tomita A. *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 135 (1986).
27. Tai K., Tomita A., Jewell J.L., Hasegawa A. *Appl. Phys. Lett.*, **49**, 236 (1986).
28. Shukla P.K., Rasmussen J.J. *Opt. Lett.*, **11**, 171 (1986).
29. Kothari N.C. *Opt. Commun.*, **36**, 247 (1987).
30. Potasek M.J., Agrawal G.P. *Phys. Rev. A*, **56**, 3862 (1987).
31. Jones C.K.R.T., Moloney J.V. *Phys. Lett. A*, **117**, 175 (1986).
32. Moloney J.V., Ariyasu J., Seaton C.T., Stegeman G.I. *Appl. Phys. Lett.*, **48**, 826 (1986).
33. Ariyasu J., Seaton C.T., Stegeman G.I. *IEEE J. Quantum Electron.*, **22**, 984 (1986).

34. Ахмедиев Н.Н., Островская Н.В. *ЖТФ*, **58**, 2194 (1988).
35. Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И., Мицкевич Н.В. *ЖЭТФ*, **94**, 159 (1988) [*JETP*, **77**, 89 (1988)].
36. Leine L., Wachter C., Langbein U., Lederer F. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**, 547 (1988).
37. Tran H.T., Ankiewicz A. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 488 (1992).
38. Malendevich R., Jankovic L., Stegeman G., Aitchison J.S. *Opt. Lett.*, **26**, 1879 (2001).
39. Agrawal G.P. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 880 (1987).
40. Rothenberg J.E. *Phys. Rev. A*, **42**, 682 (1990).
41. Aceves A.B., De Angelis C., Wabnitz S. *Opt. Lett.*, **17**, 1758 (1992).
42. Haelterman M., Sheppard A.P. *Phys. Rev. E*, **49**, 3389 (1994).
43. Tran H.T., Sammut R.A. *Opt. Commun.*, **119**, 583 (1995).
44. Seve E., Dinda P.T., Millot G., Remoissenet M., Bilbault J.M., Haelterman M. *Phys. Rev. A*, **54**, 3519 (1996).
45. Seve E., Millot G., Trillo S. *Phys. Rev. E*, **61**, 3139 (2000).
46. Millot G., Pitois S., Dinda P.T. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**, 454 (2002).
47. Malendevich R.R., Friedrich L., Stegeman G.I., Soto-Crespo J.M., Akhmediev N.N., Aitchison J.S. *Opt. Soc. Am. B*, **19**, 695 (2002).
48. Chiu H.S., Chow K.W. *Phys. Rev. A*, **79**, 065803 (2009).
49. Kourakis I., Shukla P.K. *Phys. Rev. E*, **72**, 016626 (2005).
50. Wen S., Xiang Y., Su W., Hu Y., Fu X., Fan D. *Opt. Express*, **14**, 1568 (2006).
51. Wen S., Wang Y., Su W., Xiang Y., Fu X., Fan D. *Phys. Rev. E*, **73**, 036617 (2006).
52. Xiang Y., Wen S., Dai X., Tang Z., Su W., Fan D. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**, 3058 (2007).
53. Wen S., Xiang Y., Dai X., Tang Z., Su W., Fan D. *Phys. Rev. A*, **75**, 033815 (2007).
54. Dai X., Xiang Y., Wen S., Fan D. *J. Opt. Soc. Am. B*, **26**, 564 (2009).
55. Sarma A.K., Saha M. *J. Opt. Soc. Am. B*, **28**, 944 (2011).
56. Xiang Y., Wen S., Dai X., Fan D. *J. Opt. Soc. Am. B*, **28**, 908 (2011).
57. Zhong X., Tang T., Xiang A., Cheng K. *Opt. Commun.*, **284**, 4727 (2011).
58. Xiang Y., Dai X., Wen S., Fan D. *Phys. Rev. E*, **82**, 056605 (2010).
59. Zhang L., Xiang Y., Dai X., Wen S. *J. Opt. Soc. Am. B*, **31**, 3029 (2014).
60. Inc M., Aliyua A.I., Yusufa A., Baleanu D. *Optik*, **157**, 484 (2018).
61. Zanga D., Fewo S.I., Tabi C.B., Kofanéa T.C. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **80**, 104993 (2020).
62. Zhang L., Wang Q. *Optik*, **227**, 166090 (2021).
63. Novitsky A.V., Barkovsky L.M. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **7**, S51 (2005).
64. Wang Z.J., Dong J.F. *Prog. Electromagn. Res.*, **62**, 203 (2006).
65. Wang Z.H., Xiao Z.Y., Li S.P. *Opt. Commun.*, **281**, 607 (2008).
66. Wang Z.H., Xiao Z.Y., Luo W.Y. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **11**, 015101 (2009).
67. Shen L.F., Wang Z.H. *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**, 754 (2009).
68. Taya S.A., Kullab H.M., Qadoura I.M. *J. Opt. Soc. Am. B*, **30**, 2008 (2013).
69. Конкин Д.А., Шибельгут А.А., Литвинов Р.В. *Изв. Самарского научного центра РАН*, **17**, 83 (2015).
70. Конкин Д.А., Литвинов Р.В., Парфёнова Е.С., Рахим Р.А.А., Стукач О.В. *Квантовая электроника*, **46**, 1040 (2016) [*Quantum Electron.*, **46**, 1040 (2016)].
71. Буллер А.С., Леонов С.В., Литвинова Н.Р., Литвинов Р.В. *ЖЭТФ*, **157**, 461 (2020) [*JETP*, **130**, 387 (2020)].
72. *Введение в интегральную оптику*. Под ред. М.Барноски (М.: Мир, 1977).
73. *Интегральная оптика*. Под ред. Т.Тамира (М.: Мир, 1978).
74. Хансперджер Р. *Интегральная оптика: теория и технология* (М.: Мир, 1985).
75. Унгер Х.-Г. *Планарные и волоконные оптические волноводы* (М.: Мир, 1977).
76. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов* (М.: Радио и связь, 1987).
77. Stegeman G.I., Wright E.M., Finlayson N., Zanoni R., Seaton C.T. *J. Lightwave Technol.*, **6**, 953 (1988).
78. Stegeman G.I., Seaton C.T. *J. Appl. Phys.*, **58**, R57 (1985).
79. Crosignani B., Cutolo A., Porto P.D. *J. Opt. Soc. Am.*, **72**, 1136 (1982).
80. Hasegawa A. *Opt. Lett.*, **5**, 416 (1980).
81. Crosignani B., Porto P.D. *Opt. Lett.*, **6**, 329 (1981).
82. Литвинов М.Р., Спиридонова А.С., Литвинов Р.В., Конкин Д.А. *Письма в ЖТФ*, **47**, 48 (2021).