ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

Особенности расходимости лазерных пучков с угловым моментом

В.Г.Низьев, А.Нестеров-Мюллер

Исследованы физические особенности расходимости лазерных пучков с угловым моментом. Такие пучки представлены в виде когерентной суперпозиции двух мод без углового момента. Используются аналитические формулы, удовлетворяющие уравнениям Максвелла для всех компонент электрического и магнитного полей начальных мод. Это позволяет описать суперпозицию мод в терминах компонент вектора Умова–Пойнтинга. Продемонстрирована взаимосвязь расходимости пучка и его углового момента, обусловленная зависимостью радиальной и азимутальной компонент вектора Умова–Пойнтинга от продольных компонент полей. Анализ компонент данного вектора проводился для кольцевого пучка, полученного с помощью суперпозиции азимутально и радиально поляризованных мод при различных фазовых сдвигах между ними. Согласно этому анализу пучки, имеющие угловой момент, могут распространяться без расходимости. Обсуждается метод генерации таких пучков.

Ключевые слова: *расходимость лазерных пучков, лазерные моды с угловым моментом, радиально и азимутально поляризованные моды.*

1. Введение

Одно из принципиальных отличий лазерного излучения от естественного света – малая расходимость лазерных пучков. Параметры качества M^2 и BPP (beam parameter product) используются для оценки расходимости реального лазерного пучка по сравнению с гауссовым [1]. Расходимость лазерного пучка часто является ключевым параметром, определяющим возможность его применения во многих приложениях. Особое значение она имеет для технологического процесса, проводимого на большом удалении от источника излучения [2], дистанционного зондирования, передачи информации [3, 4] и т. д. Плотность мощности на облучаемом объекте линейно зависит от начальной мощности лазерного излучения и квадратично – от его угловой расходимости. Достижение «дифракционной расходимости» лазерного пучка – важнейшая задача при разработке самых разных лазеров [5–7].

Теоретический анализ угловой расходимости лазерного пучка начинается с расчета распределения поля излучения при распространении пучка, а затем вычисляется вектор Умова–Пойнтинга [8, 9]. Плоская волна не имеет расходимости, а у ее вектора Умова–Пойнтинга есть одна компонента вдоль оси z распространения волны. Напротив, расходящийся пучок имеет изогнутый волновой фронт. В цилиндрических координатах появляется ненулевая радиальная компонента вектора Умова–Пойнтинга. Если известны распределения продольной и радиальной составляющих этого вектора, то расчет расходимости пучка становится чисто технической задачей.

В.Г.Низьев. Институт проблем лазерных и информационных технологий – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Россия, Московская обл., 140700 Шатура, ул. Святоозерская, 1; e-mail: niziev@yahoo.com

A.Nesterov-Mueller. Karlsruhe Institute of Technology, Hermann-von-Helmholtz-Platz 1, D-76344 Eggenstein-Leopoldshafen; e-mail: alexander.nesterov-mueller@kit.edu

Поступила в редакцию 24 сентября 2021 г.

При теоретическом анализе распространения лазерного пучка в пространстве применяются два основных подхода. Наиболее известный теоретический метод нахождения распределения поля – решение уравнений Максвелла. Обычно решают волновое уравнение в различных приближениях [10–12]. Были также предприняты успешные попытки преодолеть ограниченность скалярных решений, не учитывающих продольные компоненты электрического и магнитного полей [13, 14]. Второй подход состоит в решении задач дифракции с использованием принципа Гюйгенса–Френеля [15], интеграла Кирхгофа–Френеля [16] или вектора Герца [17]. Оба подхода описывают распространение типичных лазерных пучков с учетом их расходимости. Однако обобщенный вид таких решений не позволяет выявить физические факторы, влияющие на расходимость пучка.

Например, физические причины расходимости гауссова пучка и ограниченного пучка Бесселя существенно различаются. Гауссов пучок является собственным решением скалярного волнового уравнения в свободном пространстве. Его расходимость минимальна при конечном размере пучка, а распределение поля при распространении пучка остается гауссовым. Расходимость гауссова пучка вдали от перетяжки равна сходимости пучка, создаваемого фокусирующей линзой, что типично для приближения геометрической оптики. Дифракционные явления играют особую роль в области перетяжки, где радиус пучка минимален. Здесь в радиальном направлении формируется стоячая волна, определяющая расходимость пучка после перетяжки [18].

Одно из скалярных решений уравнений Максвелла – бесконечный в поперечном сечении бесселев пучок, распространяющийся без расходимости. Ограниченный диафрагмой «пучок Бесселя» таким решением не является, распределение поля при распространении данного пучка не сохраняется, а дифракция восстанавливает поле за краями диафрагмы. В работе [19] обсуждались особенности расходимости бесселевых пучков с конечной апертурой. Интенсивность в центре пучка не изменяется до тех пор, пока процесс дифракционного «распада» не достигнет центра. Термин «бездифракционные пучки» (diffraction free beams) для таких пучков некорректен.

Классические лагерр-гауссовы моды TEM$_{pq}$ (p и q – радиальный и азимутальный индексы) могут наблюдаться при генерации в лазерных резонаторах с круглыми зеркалами. Распределения полей этих мод являются решениями скалярного волнового уравнения в предположении однородной линейной поляризации в поперечном сечении пучка [11, 20]. Наряду с классическими модами в [11] указаны некоторые другие моды, образованные в результате когерентной суперпозиции классических мод. Позже данные моды, например с азимутальной и радиальной поляризациями, нашли довольно широкое применение в технике и различных исследованиях [21]. Расходимость пучков с таким распределением поля специально не исследовалась, поскольку не было оснований предполагать, что имеются существенные отличия от случая обычных мод.

В последние годы лазерные пучки со спиновым [22] или орбитальным [23] угловым моментом вызывают большой интерес из-за возможности их использования для захвата и перемещения микро- и наночастиц или для передачи информации. В частности, была исследована генерация лазерных пучков с угловыми моментами обоих типов, причем полный угловой момент равен нулю [24]. Расходимость таких пучков не привлекла внимания. Настоящая работа посвящена изучению расходимости лазерных пучков, имеющих угловой момент. Расчеты проводились для мод с круговой симметрией всех параметров, включая поляризацию.

2. Физические принципы и методы вычислений

Свойства лазерных пучков в равной степени определяются как электрическими, так и магнитными полями излучения. Шесть компонент поля описываются системой уравнений Максвелла. Мы будем использовать все эти компоненты для дальнейшего анализа. Связь между полями электромагнитной волны и практически измеряемыми параметрами лазерного пучка осуществляется с помощью трех компонент вектора Умова – Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$.

Усредненная по времени z-компонента (вдоль оси пучка) вектора Умова – Пойнтинга

$$\boldsymbol{S}_z = \boldsymbol{S}_{z1} + \boldsymbol{S}_{z2} \propto (E_r H_\varphi - E_\varphi H_r)\boldsymbol{e}_z \qquad (1)$$

описывает передачу энергии в направлении распространения электромагнитной волны. Радиально направленная компонента

$$\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{S}_{r1} + \boldsymbol{S}_{r2} \propto (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi)\boldsymbol{e}_r \qquad (2)$$

связана с расходимостью пучка. Азимутально направленная компонента

$$\boldsymbol{S}_\varphi = \boldsymbol{S}_{\varphi1} + \boldsymbol{S}_{\varphi2} \propto (E_r H_z - E_z H_r)\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (3)$$

отвечает за формирование углового момента пучка. Для дальнейших вычислений в цилиндрической системе координат компоненты полей и вектора Умова – Пойнтинга удобно представить в виде диаграммы, как показано на рис.1. Компоненты полей записываются в вершинах шестиугольника. Особенностью этого представления является то, что при вычислении компонент вектора Умова – Пойнтинга можно получить нетривиальный результат в случае умножения любой компоненты поля только на две соседние компоненты.

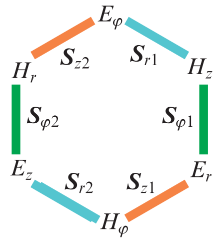

Рис.1. Графическое представление компонент электрического и магнитного полей и компонент вектора Умова – Пойнтинга.

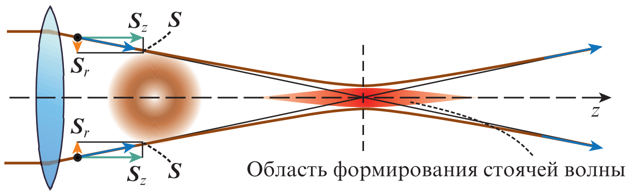

Рис.2. Кольцевая лагерр–гауссова мода, фокусируемая линзой. Показаны компоненты вектора Умова – Пойнтинга S_r и S_z. Стоячая волна образуется в области перетяжки.

Далее обратимся к работе [18], где показано, что необходимым условием расходимости пучка вдали от области перетяжки является наличие в ней стоячей волны (рис.2). Рассмотрим аксиально-симметричный лазерный пучок. После прохождения его через линзу векторы Умова – Пойнтинга направлены под углом друг к другу. Их можно представить в виде двух компонент: продольных, одинаково направленных вдоль оси пучка и радиальных, направленных перпендикулярно оси. Созданный линзой радиально направленный импульс не исчезает. Встречно направленные волны, связанные с этими радиальными компонентами вектора Умова – Пойнтинга, интерферируют в фокальной области, создавая во время их взаимодействия стоячую волну. Максимальное значение амплитуды поля такой волны наблюдается в области перетяжки. Бегущие волны, сформировавшие стоячую волну, продолжают движение. После прохождения пучка через область перетяжки радиальные компоненты вектора Умова – Пойнтинга направлены от оси пучка, что приводит к его расходимости. Данный процесс согласуется с уравнениями Максвелла и, в частности, удовлетворяет принципу взаимности.

3. Суперпозиция азимутально и радиально поляризованных мод с различными фазовыми сдвигами

Показателен и информативен полный векторный анализ с использованием мод низшего порядка с азимутальной и радиальной поляризациями. Если эти моды объединяются когерентно, то получаются разные структуры мод в зависимости от фазового сдвига исходных мод. На рис.3 показаны два случая суперпозиции мод с разными фазовыми сдвигами – $\Delta\chi = 0$ и $\pi/2$. В первом случае (рис.3,*а*) результатом суперпозиции является мода с линейной поляризацией и одинаковым углом между вектором поля и радиусом-вектором в каждой точке попереч-

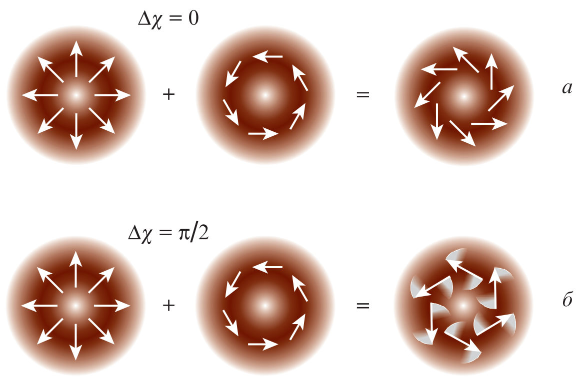

Рис.3. Суперпозиции радиально и азимутально поляризованных мод со сдвигами фазы $\Delta\chi = 0$ (*а*) и $\pi/2$ (*б*). При $\Delta\chi = 0$ во всех точках поперечного сечения результирующей моды поляризация линейная, при $\Delta\chi = \pi/2$ – круговая. Это иллюстрирует «шлейф» от вращения вектора поля.

ного сечения пучка. Суперпозиция мод на рис.3,*б* представляет собой моду с круговой поляризацией и угловым моментом.

Образующиеся моды удобны для анализа, поскольку имеются аналитические решения для всех компонент поля исходных мод, удовлетворяющих уравнению Максвелла в параксиальном приближении $\nabla \boldsymbol{F} = 0$ ($\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$). Для векторного описания каждой из двух исходных мод необходимы только три компоненты поля – H_φ, E_r, E_z и E_φ, H_r, H_z, остальные три равны нулю. Решение векторного волнового уравнения для моды с азимутально направленным вектором поля (электрическим или магнитным) является однокомпонентным и имеет круговую симметрию [25, 26]:

$$E_\varphi = H_\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{w}\right) R\exp(-R^2)\exp(\mathrm{i}\theta) \times \exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)], \tag{4}$$

где

$$\theta = 2\arctan Z - ZR^2; \quad R = \frac{r}{w}; \quad \frac{w^2}{w_0^2} = (1 + Z^2); \quad Z = \frac{z}{z_0}; \quad z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}; \tag{5}$$

w_0 – радиус перетяжки пучка. Решение для азимутального поля в перетяжке ($z = 0$, $w = w_0$) записывется в виде

$$E_\varphi = H_\varphi = \Omega\exp(\mathrm{i}\omega t), \tag{6}$$

где

$$\Omega(R) = \zeta R\exp(-R^2); \quad \zeta = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{w_0}\right).$$

Радиальные и z-компоненты для каждой из двух мод вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{i}}{k}(\nabla\times\boldsymbol{E}), \quad H_r = -\Omega\exp(\mathrm{i}\omega t), \quad H_z = \mathrm{i}\Psi\exp(\mathrm{i}\omega t),$$
$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{i}}{k}(\nabla\times\boldsymbol{H}), \quad E_r = \Omega\exp(\mathrm{i}\omega t), \quad E_z = -\mathrm{i}\Psi\exp(\mathrm{i}\omega t), \tag{7}$$

где

$$\Psi(R) = \vartheta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\Omega) = 2\zeta\vartheta(1 - R^2)\exp(-R^2); \quad \vartheta = \frac{1}{k}\frac{1}{w_0}. \tag{8}$$

Для получения выражений (7) были использованы следующие промежуточные вычисления:

$$\nabla\times\boldsymbol{F}_\varphi = -\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{F}_\varphi = \boldsymbol{E}_\varphi(r,z), \boldsymbol{H}_\varphi(r,z),$$
$$\left.\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} \approx -\mathrm{i}k\Omega\exp(\mathrm{i}\omega t), \quad \left.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right|_{z=0} = \frac{1}{w_0}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\Omega)\right]\exp(\mathrm{i}\omega t). \tag{9}$$

Действительные и мнимые члены в (7) описывают осцилляции со сдвигом фазы $\pi/2$ [18].

Комплексная форма записи в (7) неудобна для вычисления компонент вектора Умова–Пойнтинга, поскольку мы рассматриваем умножение компонент поля с учетом их фазового сдвига. Фазовый сдвиг $\pi/2$ имеет важный физический смысл. Если перемножаются компоненты поля с фазовым сдвигом $\pi/2$, то усредненный по времени вектор Умова–Пойнтинга, описывающий перенос энергии, равен нулю [27]. Однако такой фазовый сдвиг при вычислении компоненты S_r является индикатором наличия стоячей волны, которая «распадается» на бегущие волны, направленные от оси пучка после прохождения его через область перетяжки, формируя расходящийся пучок. Чтобы не потерять первичную информацию о стоячей волне, воспользуемся тригонометрической формой компонент поля, вычисляя их из (7)–(9) с помощью формул $\mathrm{Re}[\exp(\mathrm{i}\omega t)] = \cos(\omega t)$ и $\mathrm{Re}[\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\omega t)] = -\sin(\omega t)$.

Полная информация об исходных модах, включая их общий вид, все компоненты поля и компоненты вектора Умова–Пойнтинга, представлена на рис.4. У каждой из двух мод есть только три ненулевые компоненты поля. Компоненты вектора Умова–Пойнтинга для обоих пучков одинаковы и имеют следующий физический смысл:

– Усредненная по времени z-компонента отлична от нуля ($\bar{S}_z \neq 0$). Энергия переносится в направлении распространения пучка.

– Ненулевые осцилляции радиальной составляющей S_r в отсутствие переноса энергии в радиальном направлении ($\bar{S}_r = 0$) указывают на наличие стоячей волны. После прохождения пучка через область перетяжки стоячая волна распадается, формируя расходящийся пучок.

– У пучков нет углового момента, потому что $S_\varphi = 0$. Необходимые компоненты поля просто отсутствуют.

Суперпозиция этих мод с нулевым сдвигом фазы показана на рис.5. Результат такой суперпозиции имеет следующие особенности:

– Энергия переносится вдоль оси пучка ($\bar{S}_z \neq 0$).

– В перетяжке для r-компоненты вектора Умова–Пойнтинга образуется стоячая волна ($S_r \neq 0$, $\bar{S}_r = 0$).

– Есть компоненты полей, необходимые для формирования углового момента, однако он равен нулю, поскольку, согласно (3), $S_\varphi = 0$.

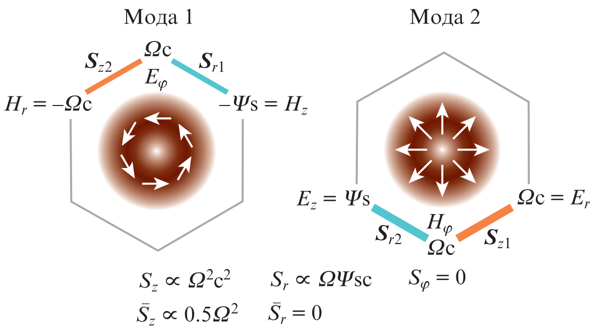

Рис.4. Графическое представление исходных пучков с азимутальной и радиальной поляризациями: моды 1 и 2 с соответствующими компонентами полей и вектора Умова–Пойнтинга. Формулы для компонент этого вектора приведены внизу. Здесь, как и на рис.5–7, буква s используется для обозначения $\sin(\omega t)$, а буква c – для обозначения $\cos(\omega t)$.

Рассмотренный вариант суперпозиции не дает качественных изменений по сравнению с исходными модами. Легко убедиться в том, что суперпозиция двух исходных мод со сдвигом фазы π не приводит к каким-либо качественно новым результатам. Суперпозиция двух мод (1 и 2) с фазовым сдвигом π/2 представляет собой наиболее интересный случай (рис.6). При таком сдвиге фазы компоненты поля моды 2 претерпевают следующие очевидные изменения: $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\omega t)$ и $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin(\omega t)$. В этом случае результирующая мода имеет несколько особых свойств:

– Стоячая волна отсутствует ($S_r = 0$), что предположительно свидетельствует об отсутствии расходимости пучка после перетяжки.

– Ненулевая азимутально направленная компонента вектора Умова–Пойнтинга указывает на появление углового момента, который прямо пропорционален компоненте S_φ.

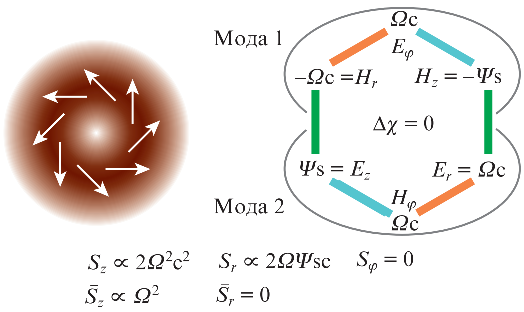

Рис.5. Суперпозиция мод 1 и 2 (рис.4) с нулевым фазовым сдвигом. Справа показаны компоненты полей и вектора Умова–Пойнтинга.

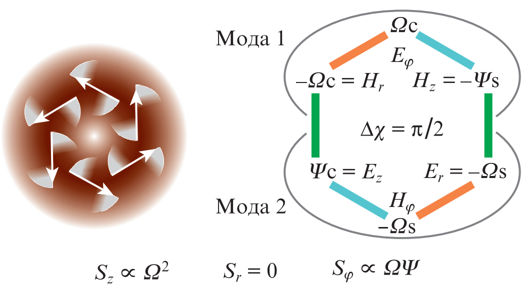

Рис.6. Суперпозиция мод 1 и 2 (рис.4) со сдвигом фазы π/2 и компоненты вектора Умова–Пойнтинга результирующей моды.

– Ненулевые компоненты S_φ и S_z не осциллируют во времени; усреднение по времени не требуется.

4. Обсуждение результатов

Характерной особенностью расходимости лагерр-гауссовой моды без углового момента является наличие стоячей волны в области перетяжки. При суперпозиции мод 1 и 2 (рис.4) с четвертьволновым фазовым сдвигом поток энергии в радиальном направлении полностью отсутствует при наличии углового момента (рис.7). Усредненная по времени радиальная составляющая вектора Умова–Пойнтинга всегда равна нулю в перетяжке. Однако в данном случае осциллирующая часть радиальной составляющей указанного вектора также равна нулю, что свидетельствует об отсутствии стоячей волны, а значит и об отсутствии расходимости пучка после прохождения его через область перетяжки. Этот пучок представляет собой неосциллирующий спиральный поток световой энергии через перетяжку, поскольку ненулевые компоненты S_φ и S_z не осциллируют во времени, а компонента S_r полностью отсутствует. Следует отметить, что расчеты проводились для моды с уникальными параметрами. Способы формирования такого пучка не связаны с какими-либо «внешними воздействиями» на его структуру (конечной апертурой или каким-либо другим препятствием). Поля исследуемого пучка удовлетворяют уравнениям Максвелла, имеют круговую симметрию и описываются относительно простыми аналитическими решениями. Полный угловой момент пучка равен нулю.

Насколько нам известно, лагерр-гауссова мода с именно такой структурой поля и угловым моментом, показанная на рис.6, еще экспериментально не реализована. Однако современные технологии позволяют планировать получение данных мод. Самая простая схема состоит из двух этапов. Первый – это генерация азимутально поляризованной моды. Есть разные способы получить ее [21]. На втором этапе используется фазовращатель π/2 на основе спирального рельефного рисунка с периодом, меньшим длины волны излучения [28, 29]. В этом случае период структуры неоднороден по радиусу. Альтернативным решением (рис.8) является поворот вектора поля азимутально поляризованного пучка на 45° с использованием обычных полуволновых фазовращателей [30]. Затем с помощью фазовращателя π/2 с рельефным рисунком в виде

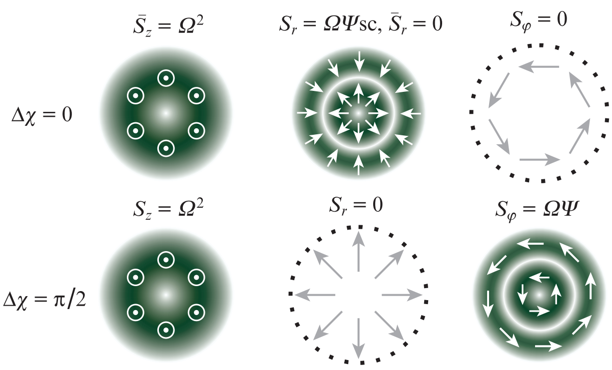

Рис.7. Результаты расчета радиальных зависимостей компонент вектора Умова–Пойнтинга для двух случаев суперпозиции мод: при нулевом фазовом сдвиге, как на рис.5 (вверху), и при фазовом сдвиге π/2, как на рис.6 (внизу).

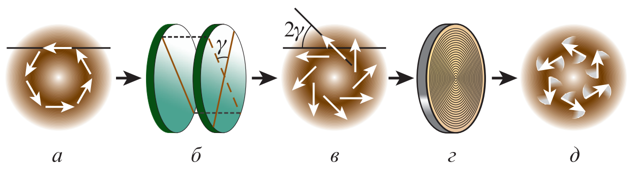

Рис.8. Схема оптических элементов для генерации моды с угловым моментом. Азимутально поляризованный лазерный пучок (*а*), проходящий через пару фазовращателей π/2 (*б*), приобретает промежуточное состояние поляризации (*в*). Фазовращатель π/2 на основе кольцевой дифракционной решетки (*г*) генерирует лазерный пучок с круговой поляризацией и угловым моментом (*д*).

концентрических окружностей с постоянным шагом по радиусу (рис.8,*г*) формируется мода с угловым моментом.

Хорошо известно, что радиально (R-TEM_{p1*}) и азимутально (A-TEM_{p1*}) поляризованные моды могут быть представлены в виде суперпозиции классических лагерр-гауссовых мод TEM_{p1} с линейной поляризацией, упомянутых во Введении. (Звездочка в индексе означает, что желаемая мода получается при соответствующей взаимной ориентации исходных мод и нулевом фазовом сдвиге.) В настоящей работе расчеты приведены для моды низшего порядка (p = 0) с круговой поляризацией (C-TEM_{01*}). Схема ее формирования может быть записана так: R-TEM_{01*} + A-TEM_{01*} → C-TEM_{01*} (рис.3,*б*). Можно показать, что выводы, сделанные для моды C-TEM_{01*}, справедливы и в более общем случае, для мод более высокого порядка C-TEM_{p1*}.

Исчерпывающее описание полей на заданной поверхности, в том числе в сечении пучка (в нашем случае – в перетяжке), определяет его дальнейшее распространение. Обычно для такого описания используются интегральные методы, например интеграл Кирхгофа–Френеля [16]. Однако данные методы не учитывают продольную компоненту поля в исходном сечении. В рассматриваемом случае это недопустимо. Продольные компоненты полей играют важнейшую роль в формировании углового момента и расходимости.

Наличие углового момента не является достаточным условием для отсутствия расходимости. Например, пучок со спиральным волновым фронтом, так называемая спиральная мода с однородной линейной поляризацией [23] и орбитальным угловым моментом, согласно аналогичным расчетам также расходится.

5. Заключение

Изучение расходимости лазерного пучка с угловым моментом потребовало переосмысления известной концепции, рассматривающей такие пучки как суперпозицию двух мод без углового момента. В новом подходе использовался полный набор аналитических формул для шести компонент поля, которые удовлетворяли уравнениям Максвелла. Расчеты проводились на примере суперпозиции азимутально и радиально поляризованных мод. Суперпозиции этих мод при разных фазовых сдвигах принципиально различаются, что следует из анализа вычисленных компонент вектора Умова–Пойнтинга.

Предложен удобный графический метод представления компонент поля и вектора Умова–Пойнтинга. Расходимость лазерных пучков с угловым моментом была проанализирована на основе всех трех компонент вектора Умова–Пойнтинга в перетяжке. Было показано, что рассмотренный пучок с угловым моментом может распространяться без расходимости, поскольку радиальная компонента вектора Умова–Пойнтинга равна нулю. Для пучков без углового момента эта компонента всегда существует и осциллирует с удвоенной частотой. Другой особенностью данного пучка является то, что ненулевые компоненты вектора Умова–Пойнтинга, азимутальные и продольные, не осциллируют во времени.

1. *Lasers and Laser-Related Equipment – Test Methods for Laser Beam Widths, Divergence Angles and Beam Propagation Ratios* (ISO Standard 11146, 2005).
2. Vostrikov V.G., Gavrilyuk V.D., Krasyukov A.G., Naumov V.G., Svotin P.A., Shashkov V.M., Shachkin L.V., Demin V.M., Matveev S.N., Blokhin O.A., Yakovenko N.A. *Chem. Pet. Eng.*, **37**, 308 (2001).
3. Pearlman M.R., Degnan J.J., Bosworth J.M. *Adv. Space Res.*, **30**, 135 (2002).
4. Hu Z., Liu H., Xia J., He A., Du Z., Li Y., Li Z., Chen T., Li H., Lü Y. *J. Opt. Soc. Am. A*, **37**, 1404 (2020).
5. Агроскин В.Я., Бравый Б.Г., Васильев Г.К., Гурьев В.И., Карельский В.Г., Каштанов С.А., Макаров Е.Ф., Сотниченко С.А., Чернышев Ю.А. *Квантовая электроника*, **46**, 703 (2016) [*Quantum Electron.*, **46**, 703 (2016)].
6. Панченко Ю.Н., Лосев В.Ф., Дударев В.В. *Квантовая электроника*, **38**, 369 (2008) [*Quantum Electron.*, **38**, 369 (2008)].
7. Афонин Ю.В., Голышев А.П., Иванченко А.И., Малов А.Н., Оришич А.М., Печурин В.А., Филев В.Ф., Шулятьев В.Б. *Квантовая электроника*, **34**, 307 (2004) [*Quantum Electron.*, **34**, 307 (2004)].
8. Bekshaev A.Ya. *Proc. SPIE*, **3904**, 131 (1999).
9. Mafusire C., Krüger T.P.J. *J. Opt.*, **20**, 065603 (2018).
10. Goubau G., Schwering F. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **9**, 248 (1961).
11. Kogelnik H., Li T. *Appl. Opt.*, **5**, 1550 (1966).
12. Siegman A. *Lasers* (Mill Valley: University Science Books, 1986).
13. Lax M., Louisell W.H., Knight W.B. *Phys. Rev. A*, **11**, 1365 (1975).
14. Cicchitelli L., Hora H., Postle R. *Phys. Rev. A*, **41**, 3727 (1990).
15. Born M., Wolf E. *Principles of Optics* (Cambridge University Press, 1999).
16. Woan G. *The Cambridge Handbook of Physics Formulas* (Cambridge University Press, 2010).
17. Nesterov A.V., Niziev V.G. *Phys. Rev. E*, **71**, 046608 (2005).
18. Niziev V., Muys P. *J. Opt. Soc. Am. A*, **37**, 1839 (2020).
19. Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1499 (1987).
20. Svelto O. *Principles of Lasers* (New York: Plenum Press, 1998).
21. Zhan Q. *Adv. Opt. Photon.*, **1**, 1 (2009).
22. Beth R. *Phys. Rev.*, **50**, 115 (1936).
23. Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P. *Phys. Rev. A*, **45**, 8185 (1992).
24. Ustinov A.V., Niziev V.G., Khonina S.N., Karpeev S.V. *J. Mod. Opt.*, **66**, 1961 (2019).
25. Nesterov A.V., Niziev V.G. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **33**, 1817 (2000).
26. Nesterov A.V., Niziev V.G. *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.*, **3**, 215 (2001).
27. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М.: Наука, 1988, с.156).
28. Bomzon Z., Kleiner V., Hasman E. *Opt. Lett.*, **26**, 1424 (2001).
29. Niv A., Biener G., Kleiner V., Hasman E. *Opt. Commun.*, **251**, 306 (2005).
30. Nesterov A.V., Niziev V.G. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **32**, 1455 (1999).