Применение свойств PT-симметрии для повышения предельной чувствительности оптических резонаторных гироскопов

Е.В.Шалымов, Т.М.Ахмадиев, В.Б.Давыдов

Предложено и описано использование системы со свойствами PT-симметрии в оптических резонаторных гироскопах. Продемонстрировано, что это позволяет повысить предельную чувствительность и не вносит недостатков, характерных для PT-симметричных лазерных гироскопов. В рассмотренном в статье примере включение системы со свойствами PT-симметрии в состав оптического резонаторного гироскопа позволяет повысить предельную чувствительность в 750 раз.

Ключевые слова: *оптический гироскоп, датчик угловой скорости, пассивный кольцевой резонатор, эффект Саньяка, PT-симметрия.*

1. Введение

PT-симметричные (Parity-Time symmetry) системы – это малоизученный класс неэрмитовых систем, обладающих уникальными свойствами. Они характеризуются PT-симметричным гамильтонианом, т.е. их гамильтониан коммутирует с операторами пространственной инверсии P и обращения времени T [1]:

$$[\hat{H},\hat{P}\hat{T}] = \hat{P}\hat{T}\hat{H}-\hat{H}\hat{P}\hat{T} = 0. \quad (1)$$

С начала 21-го века интерес к таким системам непрерывно растет. Это объясняется распространением квантово-механической концепции PT-симметричных систем, с которой начались исследования по данной тематике, на оптику, где на сегодняшний день возможна практическая реализация подобных систем. За последние годы было опубликовано несколько обзоров, посвященных неэрмитовой оптике и перспективам ее развития как в фундаментальных, так и в прикладных исследованиях [1–3]. В оптических системах условие PT-симметрии гамильтониана в (1) накладывает ограничение на диэлектрическую проницаемость среды (или, что эквивалентно, на показатель преломления): вещественная часть диэлектрической проницаемости должна быть симметричной, $\mathrm{Re}[\varepsilon(f, x, y, z)] = \mathrm{Re}[\varepsilon(f, -x, -y, -z)]$, а мнимая часть – менять знак, $\mathrm{Im}[\varepsilon(f, x, y, z)] = -\mathrm{Im}[\varepsilon(f, -x, -y, -z)]$ (f – частота оптического излучения, x, y и z – оси декартовой системы координат) [3]. Другими словами, потери в одной части системы ($\mathrm{Im}[\varepsilon] > 0$) должны быть равны усилению ($\mathrm{Im}[\varepsilon] < 0$) в противоположной ее части (рис.1).

В подобных системах могут одновременно существовать несколько мод. При малых и равных значениях потерь и усиления система находится в PT-симметричной фазе, а при плавном увеличении потерь и усиления в среде и достижении ими некоторого значения (определяющегося величиной связи между модами) достигается особая точка (точка фазового перехода). За этой точкой происходит спонтанное нарушение (разрушение) PT-симметрии и осуществляется переход от действительных собственных значений гамильтониана системы к комплексным [1]. В этом случае одна часть мод начинает поглощаться, а вторая – резко усиливаться. Таким образом, фазовый переход, который может быть напрямую или косвенно вызван изменением измеряемой физической величины, приводит к резкому изменению оптических свойств системы. Это может быть использовано для повышения точности различных оптических сенсоров, в частности датчиков угловой скорости.

На сегодняшний день опубликовано несколько работ, посвященных измерению угловой скорости с помощью систем с PT-симметрией [4–7]. В них рассматриваются различные вариации лазерных гироскопов на основе систем из двух одинаковых связанных кольцевых резонаторов, отличающихся друг от друга только уровнем потерь и усиления. При этом сообщается, что подобные гироскопы могут быть точнее классических лазерных гироскопов в области малых угловых скоростей и, теоретически, у

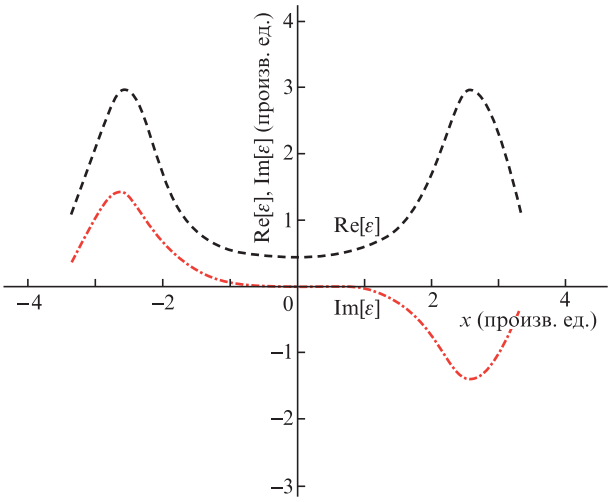

Рис.1. Пример распределения вдоль оси x (при $y = z = 0$) диэлектрической проницаемости среды в PT-симметричной системе.

Е.В.Шалымов, Т.М.Ахмадиев, В.Б.Давыдов. Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина), Россия, 197376 С.-Петербург, ул. Профессора Попова, 5; e-mail: ShEV1989@yandex.ru

Поступила в редакцию 6 ноября 2021 г., после доработки – 26 января 2022 г.

них отсутствуют зоны захвата [4]. Однако они имеют нелинейную выходную характеристику, пониженную чувствительность к высоким угловым скоростям и не позволяют определять направление вращения. Используемая в этих гироскопах система с PT-симметрией должна находиться в особой точке, что налагает жесткие ограничения на величины усиления, потерь и коэффициента связи резонаторов. Кроме того, не только вращение, но и другие внешние и внутренние факторы приводят к смещению системы из особой точки и воспринимаются такими датчиками как вращение. Например, даже малые ($\sim 10^{-3}$ °C) колебания температуры резонаторов делают практически невозможным измерение малых угловых скоростей [5]. Таким образом, эти недостатки нивелируют перечисленные преимущества. Отметим, что бóльшая часть указанных недостатков обусловлена использованием активного чувствительного элемента, входящего в состав системы с PT-симметрией. В связи с этим в нашей работе рассматривается применение свойств PT-симметрии в гироскопах с пассивными резонаторами (в оптических резонаторных гироскопах). При этом в качестве системы со свойствами PT-симметрии используется наиболее простая система из двух связанных волноводов, отличающихся друг от друга только уровнями потерь и усиления.

2. Система из двух волноводов, обладающая свойствами PT-симметрии

Для повышения чувствительности оптических резонаторных гироскопов предлагается использовать одну из наиболее простых и при этом реализованных на практике оптических систем с PT-симметрией. Она представляет собой оптическую интегральную схему и образуется двумя прямыми параллельными волноводами 1 и 2 (рис.2,*а*). Волноводы 1 и 2 располагаются на достаточном расстоянии друг от друга для поддержания оптической связи между их модами за счет эффекта оптического туннелирования. Величина этой связи может быть задана коэффициентом связи волноводов g. Диэлектрическая проницаемость этой системы распределена аналогично рис.1: вещественная часть диэлектрической проницаемости симметрична, мнимая часть меняет знак при переходе через ноль оси x. Таким образом, волновод 1 характеризуется постоянной усиления γ_1, а волновод 2 – постоянной потерь γ_2. В остальном волноводы идентичны.

Усиление и потери в волноводах поддерживаются за счет оптической накачки, подводимой сверху или снизу оптической интегральной схемы (рис.2,*б*). Практическая реализуемость описанной системы уже доказана. Ранее подобные системы с PT-симметрией уже изготавливались, например, на основе ниобата лития, легированного железом [8], или арсенида алюминия-галлия [9].

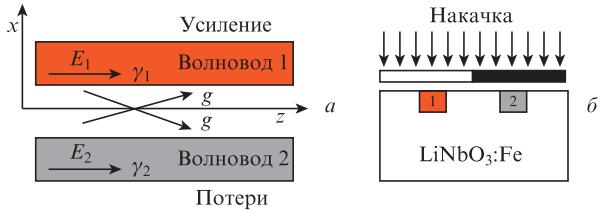

Рис.2. Оптическая система с PT-симметрией: *а* – распространение сигнала в системе (E_1, E_2 – напряженности полей излучения); *б* – пример реализации накачки.

Распределения электрических полей в волноводах 1 и 2 можно представить в следующем виде: $E_{1,2}(x, y, z) = U_{1,2}(z)V_{1,2}(x, y)$, где $U_{1,2}(z)$ – распределения амплитуд полей вдоль оси z; $V_{1,2}(x, y)$ – распределения амплитуд полей в поперечном сечении [9]. В данном исследовании интерес представляют только функции $U_{1,2}(z)$, которые могут быть определены через гамильтониан системы [1]:

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix}U_1(z)\\U_2(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11} & H_{12}\\H_{21} & H_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1(z)\\U_2(z)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_0+\mathrm{i}\gamma_1 & g\\g^* & \beta_0-\mathrm{i}\gamma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1(z)\\U_2(z)\end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $[H]$ – гамильтонова матрица системы; β_0 – постоянная распространения излучения для одного изолированного волновода без учета потерь и усиления (т.е. в случае изъятия его из системы); γ_1 и γ_2 – постоянные усиления и потерь волноводов 1 и 2 соответственно; g – комплексный коэффициент связи волноводов. Система дифференциальных уравнений (2) сводится к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$U_1''(z)+\mathrm{i}(H_{11}+H_{22})U_1'(z)$$
$$+(H_{12}H_{21}-H_{11}H_{22})U_1(z)=0. \qquad (3)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего выражению (3),

$$o_\pm=\frac{\mathrm{i}}{2}\left[-H_{11}-H_{22}\pm\sqrt{4H_{12}H_{21}+(H_{11}-H_{22})^2}\right]. \qquad (4)$$

Исходя из (2)–(4), можно определить распределения полей $U_{1,2}(z)$, образованных двумя модами (+ и –), распространяющимися в состоящей из волноводов 1 и 2 системе:

$$U_1(z)=C_+\mathrm{e}^{o_+z}+C_-\mathrm{e}^{o_-z},$$
$$U_2(z)=C_+\left(\frac{\mathrm{i}o_+-H_{11}}{H_{12}}\right)\mathrm{e}^{o_+z}+C_-\left(\frac{\mathrm{i}o_--H_{11}}{H_{12}}\right)\mathrm{e}^{o_-z}, \qquad (5)$$

где $C_\pm$ – константы, определяемые из начальных условий. Используя (2), (4), (5), можно определить постоянные распространения этих двух мод:

$$\beta_\pm=\mathrm{i}o_\pm=\frac{1}{2}\left[H_{11}+H_{22}\mp\sqrt{4H_{12}H_{21}+(H_{11}-H_{22})^2}\right]$$
$$=\beta_0+\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\mp\sqrt{|g|^2-\frac{1}{4}(\gamma_1+\gamma_2)^2}. \qquad (6)$$

Теперь проанализируем, как изменение величины потерь в волноводе 2 влияет на усиление/ослабление мод + и –. Для большей наглядности построим с использованием (6) зависимости постоянных распространения мод $\beta_\pm$ от γ_2 (рис.3). При построении зависимостей на рис.3 величина $|g|$ была задана равной 3.28 см$^{-1}$.

При $\gamma_1 = \gamma_2$ (рис.3,*а*) описанную систему можно назвать PT-симметричной, т.е. выполняются соотношения $\mathrm{Re}[\varepsilon(f, x, y, z)] = \mathrm{Re}[\varepsilon(f, -x, -y, -z)]$, $\mathrm{Im}[\varepsilon(f, x, y, z)] =$

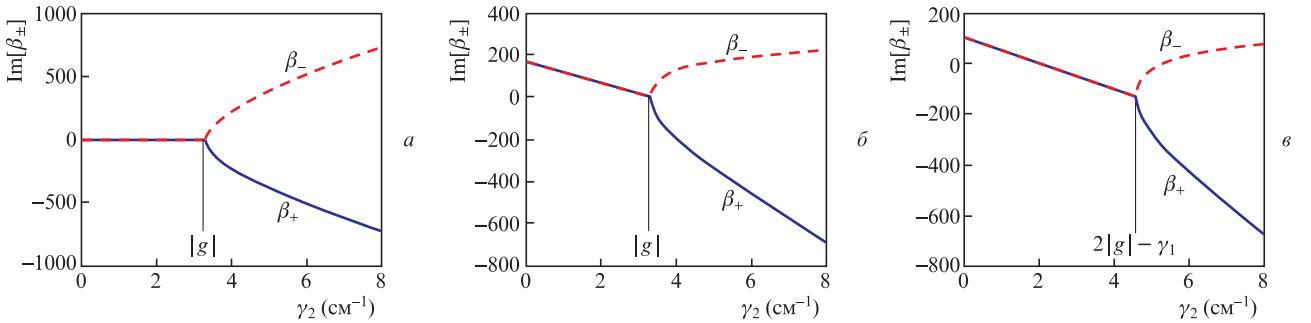

Рис.3. Зависимости постоянных распространения мод $\beta_\pm$ от γ_2 при $\gamma_1 = \gamma_2$ (*а*), $\gamma_1 = |g|$ (*б*), $\gamma_1 = 0.6|g|$ (*в*).

$-\mathrm{Im}[\varepsilon(f, -x, -y, -z)]$. При $\gamma_1 = \gamma_2 < |g|$ система находится в PT-симметричной фазе. В этом случае ее моды не испытывают усиления и потерь. При $\gamma_1 = \gamma_2 > |g|$ система перейдет в фазу с разрушенной PT-симметрией и моды + и – станут испытывать потери и усиление соответственно. Стоит отметить, что создать и сохранить строгий баланс усиления и потерь волноводов 1 и 2 ($\gamma_1 = \gamma_2$) на практике очень сложно из-за нестабильности окружающей среды и оптической накачки, погрешностей в изготовлении волноводов и т. п. Поэтому, с практической точки зрения, больший интерес представляют системы, не имеющие строгого баланса усиления и потерь ($\gamma_1 \neq \gamma_2$), но обладающие свойствами PT-симметричных систем (рис.3,*б*,*в*). Для них не выполняется условие $\mathrm{Im}[\varepsilon(f, x, y, z)] = -\mathrm{Im}[\varepsilon(f, -x, -y, -z)]$, но существует «скрытый» фазовый переход, и посредством формальных преобразований системы могут быть сведены к PT-симметричным [1, 3]. Далее будем называть такие системы «системами со свойствами PT-симметрии». Точка фазового перехода таких систем соответствует условию $\gamma_2 = 2|g| - \gamma_1$, т. е. при росте потерь в волноводе 2 также происходит фазовый переход, после которого наблюдается резкое изменение ослабления и усиления полей мод + и –. Это событие может быть зафиксировано с высокой точностью, что позволяет использовать данные системы для повышения точности измерения различных физических величин.

3. Применение свойств PT-симметрии в оптических резонаторных гироскопах

В качестве чувствительных элементов оптических резонаторных гироскопов используются различные типы кольцевых резонаторов [10]. Принцип их работы основан на измерении угловой скорости Ω по вызванному эффектом Саньяка расщеплению собственных частот пассивного кольцевого резонатора Δf_S. Это расщепление пропорционально угловой скорости

$$\Delta f_S = f_{cw} - f_{ccw} = \frac{4A}{\lambda L}\Omega, \tag{7}$$

где f_{cw} и f_{ccw} – собственные частоты резонатора для волн, обходящих его по и против часовой стрелки соответственно; A – площадь, охватываемая контуром резонатора; $\lambda = c/f_0$; c – скорость света в вакууме; f_0 – собственная частота неподвижного резонатора; L – периметр резонатора. На рис.4 приведена обобщенная схема оптического резонаторного гироскопа. Излучение от перестраиваемого лазера *1* делится У-образным разветвителем *2* на два канала. Частоты волн в этих каналах регулируются при прохождении через фазовые модуляторы *3* и *4*. Затем, используя направленный ответвитель *9*, излучение вводится в пассивный кольцевой резонатор *10* в направлениях по и против часовой стрелки. Через направленные ответвители *7*, *8* и *9* свет попадает на фотоприемники *5* и *6*. Сигналы с фотоприемников направляют в вычислительную систему *11*. По изменению амплитудной характеристики пассивного кольцевого резонатора, регистрируемой фотоприемниками *5* и *6*, вычислительная система *11* определяет собственные частоты f_{cw} и f_{ccw} и с помощью фазовых модуляторов *3* и *4* и/или перестраиваемого лазера *1* подстраивает под них частоты волн в двух каналах гироскопа. Угловая скорость определяется системой по разности собственные частот $f_{ccw} - f_{cw}$ в соответствии с выражением (7). Подробнее принцип работы оптических резонаторных гироскопов изложен в предыдущих статьях по данной тематике [10, 11]. Предельная чувствительность гироскопов этого типа к угловой скорости $\delta\Omega$, т. е. минимальное изменение угловой скорости, которое потенциально может быть измерено на фоне фотонного шума фотодетекторов (квантовый предел измерений), определяется выражением [12]

$$\delta\Omega = \frac{cL\sqrt{2}}{4Af_0}\sqrt{\frac{hf_0\Delta\nu}{I_{in}}}\left[\max\left(\frac{1}{\sqrt{I_n}}\frac{dI_n}{df}\right)\right]^{-1}, \tag{8}$$

где h – постоянная Планка; $\Delta\nu$ – полоса пропускания системы обработки сигналов; I_{in} – мощность на входе оптической схемы гироскопа; $I_n = I_{out}/I_{in}$ – нормированная мощность на выходе оптической схемы гироскопа (коэффициент передачи); I_{out} – мощность на выходе оптической схемы гироскопа (мощность, направляемая на фотоприемник).

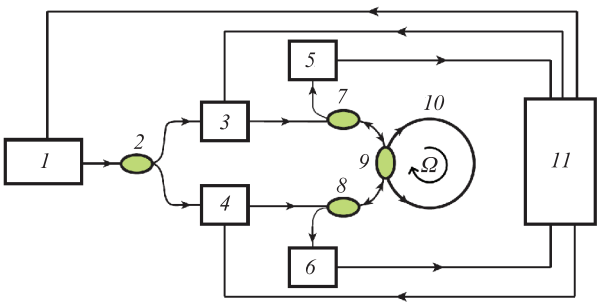

Рис.4. Обобщенная схема оптического резонаторного гироскопа: *1* – перестраиваемый лазер; *2* – разветвитель; *3*, *4* – фазовые модуляторы; *5*, *6* – фотоприемники; *7*, *8*, *9* – направленные ответвители; *10* – пассивный кольцевой резонатор; *11* – вычислительная система.

Как отмечалось выше, за счет фазового перехода PT-симметричные системы могут резко изменять оптические свойства, что предлагается использовать для повышения крутизны коэффициента передачи оптических резонаторных гироскопов dI_n/df. Из (8) видно, что это должно уменьшить минимально измеримое изменение угловой скорости (т.е. повысить предельную чувствительность). Чтобы это реализовать, можно подключить систему со свойствами PT-симметрии, описанную в разд.2, к пассивному кольцевому резонатору (рис.5).

Будем считать, что волноводы 1 и 2 (рис.5) идентичны, за исключением усиления и потерь в них. Для простоты будем считать, что резонатор, подключенный к системе со свойствами PT-симметрии, имеет форму трека и оптически связан только с волноводом 2 на протяжении всей длины системы l.

Известно, что отношение напряженностей электрических полей излучения на выходе и входе пассивного кольцевого резонатора определяется выражением [10]

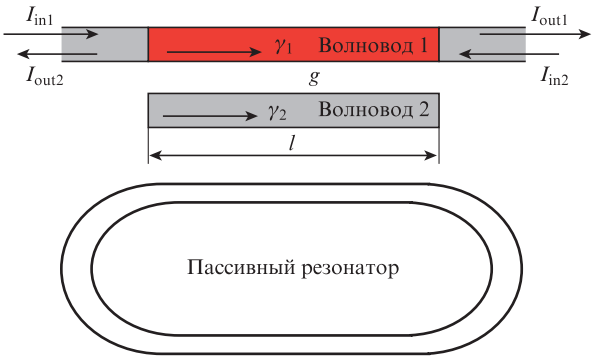

Рис.5. Система со свойствами PT-симметрии, подключенная к пассивному кольцевому резонатору.

$$t = \frac{y - xe^{-i\delta_p}}{1 - xye^{-i\delta_p}}, \tag{9}$$

где $x = \sqrt{1-P}$; $y = \sqrt{1-K}$; $\delta_p = 2\pi LN(f - 0.5\Delta f_S)/c$ – набег фазы, приобретаемый волной за один обход резонатора; P – доля энергии, теряемая волной за один обход резонатора; K – энергетический коэффициент связи резонатора с пассивным волноводом; N – эффективный показатель преломления волновода резонатора. Подключение пассивного кольцевого резонатора к описанной системе со свойствами PT-симметрии может быть описано добавлением слагаемого $H_p = i\ln t/l$ в элемент H_{22} гамильтониана системы.

С использованием (2), (4), (5) и (9) можно определить коэффициенты передачи для пассивного кольцевого резонатора I_{n0} и резонатора, подключенного к системе со свойствами PT-симметрии $I_{n1} = I_{out1}/I_{in1}$, а также их крутизну: dI_{n0}/df и dI_{n1}/df соответственно (рис.6). При построении зависимостей на рис.6 использовались следующие параметры системы: $P = K = 0.1$, $L = 6$ см, $N = 2.48$, $|g| = 3.28$ см$^{-1}$, $\gamma_1 = 0.3|g|$, $\gamma_2 = 0.9|g|$, $l = 1$ см, $\lambda = 1.5$ мкм. Перечисленные значения достижимы на практике. При выборе значений постоянных усиления и потерь учитывались следующие факторы: выполнение условия $\gamma_2 < 2|g| - \gamma_1$ (т.е. без учета пассивного кольцевого резонатора система должна находиться в симметричной фазе); максимальное значение коэффициента передачи I_{n1} не должно превышать двух. Выбранные значения параметров хотя и не являются оптимальными, но позволяют наглядно оценить преимущества предложенной в работе идеи. Также при моделировании учитывалась ширина линии излучения лазера, равная 20 кГц. Такая ширина соответствует характеристикам перестраиваемых одночастотных полупроводниковых лазеров, обычно используемых в схемах оптических резонаторных гироскопов [13].

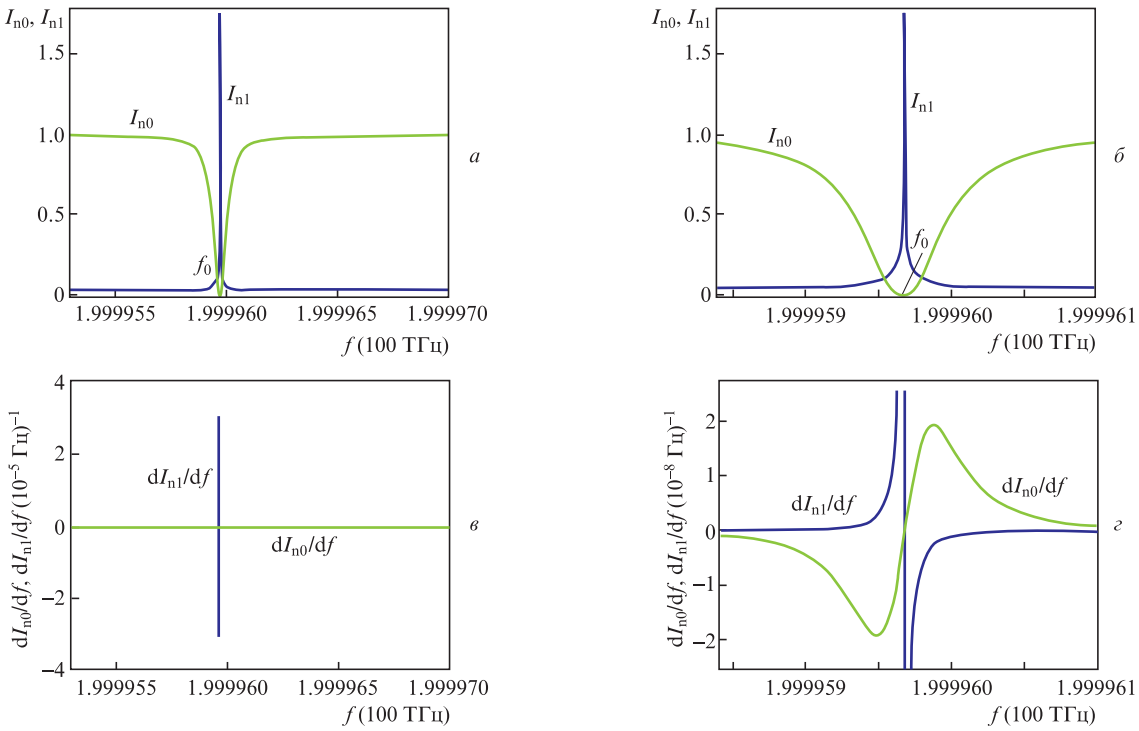

Рис.6. Коэффициенты передачи для пассивного кольцевого резонатора I_{n0} и резонатора, подключенного к системе со свойствами PT-симметрии, I_{n1} (*а*); участок зависимостей рис.*а* в увеличенном по частоте масштабе (*б*); частотные зависимости крутизны коэффициентов передачи (*в*); участок зависимостей рис.*в* в увеличенном по частоте масштабе (*г*).

Как видно из рис.6, коэффициент передачи для пассивного кольцевого резонатора I_{n0} уменьшается с приближением к собственной частоте. В результате этого подключение пассивного кольцевого резонатора к системе со свойствами PT-симметрии приводит к дополнительному увеличению потерь пассивного волновода 2 на величину, зависящую от частоты света f. Таким образом, при приближении к собственным частотам потери в системе со свойствами PT-симметрии возрастают, она проходит точку фазового перехода и это вызывает резкое изменение коэффициента передачи I_{n1} (рис.6). Как видно из рис.6,*в*,*г*, применение системы со свойствами PT-симметрии позволяет на несколько порядков увеличить максимальное значение крутизны коэффициента передачи. В соответствии с (8) предельная чувствительность оптического резонаторного гироскопа тем выше, чем больше величина

$$\max\left(\frac{1}{\sqrt{I_n}}\frac{dI_n}{df}\right).$$

При указанных параметрах подключение системы со свойствами PT-симметрии повышает предельную чувствительность оптического резонаторного гироскопа приблизительно в 750 раз. Например, при $\Delta\nu = 1$ кГц и $I_{in} = 1$ мВт предельная чувствительность обычного резонаторного гироскопа составит 141 °/ч, а при использовании предложенной системы она повысится до 0.188 °/ч.

Кроме того, рассмотренный подход лишен недостатков, присущих PT-симметричным лазерным гироскопам. Как следует из (7), оптический резонаторный гироскоп имеет линейную выходную характеристику, одинаковую чувствительность во всем диапазоне измеряемых угловых скоростей и позволяет измерять направление вращения. При рассмотренном подходе к измерению угловой скорости отсутствуют жесткие требования к значениям и стабильности параметров системы со свойствами PT-симметрии. Изменение параметров $|g|$, γ_1 и γ_2 не влияет на определяемое в оптических резонаторных гироскопах расщепление собственных частот пассивного кольцевого резонатора, по которому вычисляется угловая скорость (см. (7)). Однако их нестабильность может оказывать влияние на предельную чувствительность. При указанных выше параметрах гироскопа уменьшение γ_1 на 10% ухудшит предельную чувствительность всего на 8%, а изменение $|g|$ на 10% ухудшит на 10%. Увеличение γ_1 или $|g|$ на 10%, напротив, повысит предельную чувствительность на 9%. Аналогичное изменение γ_2 оказывает еще более слабое влияние на чувствительность. Стоит отметить, что существуют такие значения параметров $|g|, \gamma_1, \gamma_2$, P и K, при которых максимальное значение коэффициента передачи увеличивается до 100 и более. На практике это может приводить к насыщению усиления среды активного волновода и к усилению спонтанного излучения в системе со свойствами PT-симметрии, что негативно скажется на работе гироскопа. Это не препятствует созданию гироскопа, но дополнительно усложняет задачу оптимизации параметров системы.

Таким образом, применение в оптическом резонаторном гироскопе описанной в работе системы со свойствами PT-симметрии позволяет повысить его предельную чувствительность и не вносит отрицательных факторов, характерных для PT-симметричных лазерных гироскопов.

4. Заключение

В работе кратко рассмотрены понятие PT-симметрии и условия, необходимые для создания оптических PT-симметричных систем. Фазовый переход, наблюдаемый в оптических PT-симметричных системах, может использоваться для повышения точности различных оптических сенсоров, в частности датчиков угловой скорости. На сегодняшний день опубликовано несколько исследований, посвященных таким датчикам. В них рассматриваются различные вариации PT-симметричных лазерных гироскопов. Однако PT-симметричные лазерные гироскопы малоинтересны с практической точки зрения из-за значительного количества критических недостатков: жестких требований к значениям и стабильности параметров PT-симметричной системы, чувствительности этих параметров к различным внешним и внутренним факторам (например, колебаниям температуры), нелинейности выходной характеристики и неопределенности направления вращения.

В работе предложено использовать системы со свойствами PT-симметрии в оптических резонаторных гироскопах. Показано, что это позволяет повысить предельную чувствительность и не вносит отрицательных факторов, характерных для PT-симметричных лазерных гироскопов. При этом в качестве системы со свойствами PT-симметрии используется одна из наиболее простых систем, уже не раз реализованная на практике. Она представляет собой оптическую интегральную схему и образуется двумя прямыми параллельными оптически связанными волноводами, отличающимися друг от друга только уровнем усиления и потерь. В рассмотренном в статье примере включение ее в состав оптического резонаторного гироскопа позволяет повысить предельную чувствительность в 750 раз.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № FSEE-2020-0005).

1. Zhao H., Feng L. *Nat. Sci. Rev.*, **5** (2), 183 (2018).
2. Feng L., El-Ganainy R., Ge L. *Nature Photon.*, **11** (12), 752 (2017).
3. Зябловский А.А., Виноградов А.П., Пухов А.А., Дорофеенко А.В., Лисянский А.А. *УФН*, **184** (11), 1177 (2014) [*Phys. Usp.*, **57** (11), 1063 (2014)].
4. Ren J. et al. *Opt. Lett.*, **42** (8), 1556 (2017).
5. Chen C., Zhao L. *Opt. Commun.*, **474** (3), 126108 (2020).
6. Smith D.D. et al. *Opt. Express*, **27** (23), 34169 (2019).
7. Carlo M.D., Leonardis F.D., Passaro V.M.N. *J. Lightwave Technol.*, **36** (16), 3261 (2018).
8. Rüter C. et al. *Nature Phys.*, **6**, 192 (2010).
9. Guo A. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **103** (9), 093902 (2009).
10. Венедиктов В.Ю., Филатов Ю.В., Шалымов Е.В. *Квантовая электроника*, **46** (5), 437 (2016) [*Quantum Electron.*, **46** (5), 437 (2016)].
11. Венедиктов В.Ю., Филатов Ю.В., Шалымов Е.В. *Квантовая электроника*, **44** (12), 1145 (2014) [*Quantum Electron.*, **44** (12), 1145 (2014)]
12. Venediktov V.Yu., Filatov Yu.V., Shalymov E.V. *Proc. SPIE*, **9506**, 95061N (2015).
13. Дураев В.П., Медведев С.В. *ФТП*, **48** (1), 125 (2014).