Численно-аналитический расчет функций влияния приводов прямоугольного деформируемого зеркала со свободными краями

Д.А.Ягнятинский, В.Н.Федосеев

Представлен новый метод расчета функций влияния приводов прямоугольного деформируемого зеркала со свободными краями в модели сосредоточенных воздействий. Функция прогиба зеркала ищется в виде ряда Фурье по модам поперечных собственных колебаний тонкой прямоугольной пластины со свободными краями. Моды колебаний рассчитываются численно методом конечных элементов. Полученные моды подставляются в формулы для расчета коэффициентов перед членами используемого ряда (частичной суммы). Приводится верификация данного решения с помощью сравнения с расчетом функций влияния целиком посредством метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Результат может быть использован для выбора и оптимизации плана расположения приводов прямоугольных и квадратных деформируемых зеркал в задачах адаптивной оптики.

Ключевые слова: *численно-аналитический расчет, функции влияния приводов, прямоугольное деформируемое зеркало, свободные края, сосредоточенные воздействия, метод конечных элементов.*

1. Введение

В задачах адаптивной оптики в качестве корректирующего элемента, который осуществляет воздействие на волновой фронт светового излучения, часто используется деформируемое зеркало (ДЗ). Самой важной характеристикой ДЗ является его пространственное разрешение, которое показывает, какие аберрации (формы искажений и их характерные частоты) способно отрабатывать данное зеркало. Качество воспроизведения зеркалом заданной геометрии поверхности главным образом определяется функциями влияния его приводов (альтернативный термин – функции отклика поверхности) [1]. Каждая функция влияния привода представляет собой поперечное смещение отражающей поверхности зеркала при подаче единичного сигнала на данный привод.

Прямоугольные и квадратные ДЗ со свободными краями и стержневыми пьезоприводами получили широкое распространение при решении различных задач адаптивной оптики применительно к технологическим лазерам [2], системам направленной энергии [3], установкам лазерного термоядерного синтеза [2]. В частности, в мощных лазерных установках широко распространены квадратные и прямоугольные ДЗ, повторяющие по форме поперечное сечение соответствующего лазерного резонатора или активной зоны [4, 5]. К настоящему времени корректный аналитический расчет функций влияния приводов таких зеркал (в упрощенной модели сосредоточенных воздействий) отсутствует. Для зеркал с круглой подложкой соответствующие решения были получены в работах [6 – 8].

Расчет функций влияния приводов ДЗ необходим на этапе проектирования зеркала. При этом важно выбрать не только его геометрические параметры и материалы, но и число и план расположения управляющих приводов. Часто для упрощения расчетов и оценок вместо рассчитанных функций влияния стержневых пьезоприводов используют гауссову или супергауссову функцию [2]. Такое приближение может неплохо описывать функции влияния приводов в центральной части ДЗ, но хуже выполняется на периферии. Кроме того, имеется принципиальное различие между гауссовой/супергауссовой функцией и функцией влияния, точно рассчитанной по уравнениям теории упругости. Оно заключается в том, что у последней радиальный прогиб зеркала под действием приводов может иметь небольшие отрицательные значения [2, 9]. Вдобавок у точной функции есть выраженная периодичность в азимутальном направлении. Число азимутальных периодов определяется геометрией расположения окружающих приводов. В связи с этим вид функции Гаусса для аппроксимации реальной функции влияния дополнительно модифицируют [10]. Однако при возможности выполнения прямого расчета функций влияния отпадает необходимость использовать специфические приближения и уточнения.

Трудность нахождения точного решения для зеркал прямоугольной формы связана с тем, что в случае свободных краев для мод собственных колебаний, по которым удобно раскладывать функцию прогиба, не существует конечного аналитического выражения в известных функциях. Тем не менее стоит отметить, что в статье С.О.Папкова [11] было получено асимптотически точное аналитическое решение для мод собственных колебаний в виде ряда Фурье. В работах [12, 13] авторы рассматривают приближенный аналитический подход к расчету мод и собственных частот поперечных колебаний тонкой прямоугольной пластины со свободными краями. Особенность рассмотрения заключается в разделении мод на

Д.А.Ягнятинский, В.Н.Федосеев. АО «НИИ НПО "ЛУЧ"», Россия, Московская обл., 142103 Подольск, ул. Железнодорожная, 24; e-mail: yagnyatinskiyda@sialuch.ru, fedoseevvn@sialuch.ru

Поступила в редакцию 8 июля 2022 г., после доработки – 3 августа 2022 г.

«обычные» и «пропущенные». Обычные аппроксимируются произведениями мод стержней со свободными концами, расположенных в двух взаимно перпендикулярных направлениях (параллельных сторонам пластины), а пропущенные представляют собой сумму или разность таких произведений. В [12], в частности, при вычислении частот колебаний и коэффициентов, определяющих форму собственных мод, на каждом крае пластины рассматривают усредненное граничное условие.

В работах [14, 15] для аналитического расчета прогиба прямоугольного зеркала со свободными краями в качестве базисных функций используется ряд с элементами в виде произведения мод собственных колебаний стержней со свободными концами, расположенных в двух взаимно перпендикулярных направлениях (параллельных сторонам пластины). Однако такой подход является довольно грубой аппроксимацией, т. к. данные функции не удовлетворяют (в [15] ошибочно указано, что удовлетворяют) граничным условиям на свободных краях прямоугольной пластины. Как следствие, точность расчета с помощью таких функций недостаточно высока, а в случае уменьшения числа приводов решение и вовсе «разваливается».

Для того чтобы упростить использование базисных функций, в настоящей работе предлагается новый численно-аналитический метод расчета прогиба ДЗ. В рассматриваемой модели сосредоточенных воздействий вместо аналитически полученных используются численно рассчитанные моды и частоты собственных колебаний, которые подставляются в формулы для аналитической части решения, как было предложено нами для случая круглого зеркала в [8]. В настоящее время методом конечных элементов (МКЭ) можно легко выполнить необходимый предварительный численный расчет. Как будет показано ниже, точность данного подхода очень высока. Также из математического рассмотрения задачи будет видно, что предлагаемый метод без труда обобщается на случай тонкой пластины (при необходимости и ортотропной) любой формы и с произвольными условиями закрепления на границе.

2. Математическая формулировка задачи

Прогиб $w(x,y)$ упругой прямоугольной однородной тонкой пластины при воздействии распределенного давления $q(x,y)$ подчиняется неоднородному бигармоническому уравнению [16]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) w(x,y) = \frac{q(x,y)}{D},$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{1}$$

где x и y – координаты вдоль сторон пластины; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины соответственно; h – толщина пластины; D (в Н · м) – ее цилиндрическая жесткость, которая определяет пропорциональную зависимость между изгибающими моментами и величинами кривизны пластины и характеризует способность пластины сопротивляться изгибу.

Для свободных краев пластины со сторонами длинами $2a$ и $2b$, центр которой находится в начале координат, граничные условия имеют вид [16]

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{\substack{x=-a,\\ x=a}} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=-a,\\ x=a}} = 0 \tag{2}$$

и, соответственно, такой же вид при перестановке $x \leftrightarrow y$ и замене $a \leftrightarrow b$.

При этих граничных условиях перекрестный член в левой части уравнения (1) препятствует использованию метода разделения переменных, и решение типа решения Навье, как для случая свободно опертой прямоугольной пластины [16], получить не удается.

Давление, производимое на пластину сосредоточенными силами от приводов, можно представить в виде

$$q(x,y) = F_0 \delta(x - x_{j0})\,\delta(y - y_{j0})$$
$$- \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j \delta(x - x_j)\,\delta(y - y_j), \tag{3}$$

где F_0 – внутренняя растягивающая сила в активном приводе с номером $j0$ (на который подается электрическое напряжение); n_a – число приводов (актюаторов); x_j, y_j – координаты j-го привода; K_j – его жесткость; w_j – деформация j-го привода; δ – дельта-функция Дирака. Требуется определить функцию $w(x,y)$ при $(x,y) \in [-a,a] \times [-b,b]$. Математическая особенность данной задачи состоит в том, что правая часть уравнения (1), записанная с использованием выражения (3), содержит заранее неизвестные значения w_j.

3. Решение в виде ряда Фурье

Решение уравнения (1) можно искать в виде ряда Фурье по собственным модам поперечных колебаний рассматриваемой пластины:

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i W_i(x,y), \tag{4}$$

где α_i – искомые коэффициенты, а базис $\{W_i\}$ содержит в том числе и так называемые моды абсолютно твердого тела – параллельное поперечное смещение и наклоны по двум взаимно перпендикулярным осям x и y.

При собственном гармоническом колебании пластины $w(x,y,t) = W(x,y)\sin\omega t$ с циклической частотой ω выбранная мода W удовлетворяет уравнению [17]

$$\nabla^4 W(x,y) - \frac{\rho h \omega^2}{D} W(x,y) = 0,$$

где ρ – плотность материала пластины. Перепишем это уравнение, введя новое обозначение:

$$\nabla^4 W(x,y) = \lambda^* W(x,y), \tag{5}$$

где $\lambda^* = \rho h \omega^2 / D$ – собственное значение, соответствующее рассматриваемой моде для пластины со сторонами длинами $2a$ и $2b$. Таким образом, каждая базисная функция $W_i(x,y)$ в выражении (4) удовлетворяет уравнению (5) со своим собственным значением λ_i^* (для мод абсолютно

твердого тела собственные значения равны нулю). Все базисные функции также удовлетворяют граничным условиям (2). Кроме того, из общей теории [17] следует, что выбранная для разложения прогиба система мод является ортогональной и ее дополнительно удобно нормировать на площадь пластины:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} W_i(x,y)\,W_{i'}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4ab\delta_{ii'},$$

где δ – символ Кронекера.

После подстановки в левую часть уравнения (1) разложения (4) имеем выражение

$$\nabla^4 w(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\nabla^4 W_i(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\lambda_i^* W_i(x,y). \qquad (6)$$

Таким образом, с учетом (3) и (6) уравнение (1) запишется в виде

$$D\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\lambda_i^* W_i(x,y) = F_0\delta(x-x_{j0})\delta(y-y_{j0}) - \sum_{j=1}^{n_\mathrm{a}} K_j w_j\delta(x-x_j)\delta(y-y_j). \qquad (7)$$

Умножим формулу (7) на один из базисных элементов $W_{i0}(x,y)$ и подействуем на полученное соотношение оператором $\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Тогда вследствие ортонормированности базисных функций и селективного свойства δ-функции имеем равенство

$$4abD\alpha_{i0}\lambda_{i0}^* = F_0 W_{i0}(x_{j0},y_{j0}) - \sum_{j=1}^{n_\mathrm{a}} K_j w_j W_{i0}(x_j,y_j). \qquad (8)$$

Система уравнений (8) при разных значениях индекса $i0$ всегда будет содержать n_a дополнительных неизвестных w_j. Для того чтобы дополнить эти соотношения недостающими уравнениями, следует воспользоваться так называемыми самосогласованными условиями, выражающими кинематическую связь в системе – равенство растяжения/сжатия j-го привода и поперечного прогиба пластины в точке расположения привода. Непосредственно из (4) получаем выражение

$$w_j = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i W_i(x_j,y_j). \qquad (9)$$

Введем следующие обозначения: $W_i(j) \equiv W_i(x_j,y_j)$ и $\Delta_{i0}(i) \equiv 4abD\delta_{i0}\lambda_i^*$. Тогда уравнения (9) и (8) можно записать в виде единой системы линейных алгебраических уравнений (при разных значениях индекса j в первом и индекса $i0$ во втором соотношениях):

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n_\mathrm{a}}\delta_{jl}w_l - \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i W_i(j) = 0,\\ &\sum_{j=1}^{n_\mathrm{a}} K_j W_{i0}(j)w_j + \sum_{i=0}^{\infty}\Delta_{i0}(i)\alpha_i = F_0 W_{i0}(j0).\end{aligned} \qquad (10)$$

Количество первых уравнений в (10) равно числу приводов n_a, а количество вторых уравнений может быть взято сколь угодно большим, но при этом число неизвестных в полной системе всегда будет равно числу уравнений. Столбец, относительно которого нужно разрешить систему, выглядит следующим образом:

$$WA = (w_1\ \ldots\ w_{n_\mathrm{a}}\ \alpha_0\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_i\ \ldots)^\mathrm{T}.$$

Таким образом, соотношения (10) представляют собой решение поставленной математической задачи в неявном виде. Чтобы в практических расчетах получить явное выражение для неизвестных коэффициентов (с очень малым, но ненулевым отклонением от истинных значений) нужно ограничить число рассматриваемых собственных мод до некоторого максимального номера $\bar{i}$ и обратить матрицу системы:

$$MA\cdot WA = FD \rightarrow WA = MA^{-1}\cdot FD, \qquad (11)$$

где матрицу системы и столбец свободных членов удобно представить в виде блоков:

$$MA = \begin{bmatrix} I_{n_\mathrm{a}} & -WW_{n_\mathrm{a}\times(\bar{i}+1)} \\ KW_{(\bar{i}+1)\times n_\mathrm{a}} & DL_{(\bar{i}+1)\times(\bar{i}+1)}\end{bmatrix},\ FD = \begin{bmatrix}\theta_{n_\mathrm{a}} \\ FD2_{(\bar{i}+1)}\end{bmatrix},$$

где I_{n_a} – единичная матрица порядка n_a;

$$WW = \begin{pmatrix} W_0(1) & W_1(1) & \ldots & W_{\bar{i}}(1) \\ W_0(2) & W_1(2) & \ldots & W_{\bar{i}}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_0(n_\mathrm{a}) & W_1(n_\mathrm{a}) & \ldots & W_{\bar{i}}(n_\mathrm{a})\end{pmatrix};$$

$$KW = \begin{pmatrix} K_1W_0(1) & K_2W_0(2) & \ldots & K_{n_\mathrm{a}}W_0(n_\mathrm{a}) \\ K_1W_1(1) & K_2W_1(2) & \ldots & K_{n_\mathrm{a}}W_1(n_\mathrm{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1W_{\bar{i}}(1) & K_2W_{\bar{i}}(2) & \ldots & K_{n_\mathrm{a}}W_{\bar{i}}(n_\mathrm{a})\end{pmatrix};$$

$$DL = \begin{pmatrix} \Delta_0(0) & \Delta_0(1) & \cdots & \Delta_0(\bar{i}) \\ \Delta_1(0) & \Delta_1(1) & \cdots & \Delta_1(\bar{i}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{\bar{i}}(0) & \Delta_{\bar{i}}(1) & \cdots & \Delta_{\bar{i}}(\bar{i})\end{pmatrix};$$

θ_{n_a} – нулевой столбец высоты n_a;

$$FD2 = (W_0(j0)\ W_1(j0)\ \ldots\ W_{\bar{i}}(j0))^\mathrm{T}.$$

Из полученной аналитической части решения видно, что для нахождения неизвестных коэффициентов необходимо подставить в матрицы значения собственных частот колебаний пластины, а также значения поперечных координат мод в точках расположения каждого привода. В нашем подходе расчет этих величин проводится с помощью МКЭ.

Для выполнения численных расчетов применялся программный комплекс ANSYS. Пластина моделировалась объектом типа Surface Body, имеющим заданные толщину и значения физических констант. Использовалась подробная сетка из квадратных элементов с большим числом разбиений по обеим сторонам пластины (элемент размером 2 × 2 мм). Тип элемента – SHELL181. Таким образом, построенная сетка (рис.1) имеет принципиально самое высокое качество (с параметрами Element Quality, Aspect Ratio и Orthogonal Quality, равными единице, и параметром Skewness, равным нулю), что позволяет провести численные расчеты с высокой точностью. Из полученно-

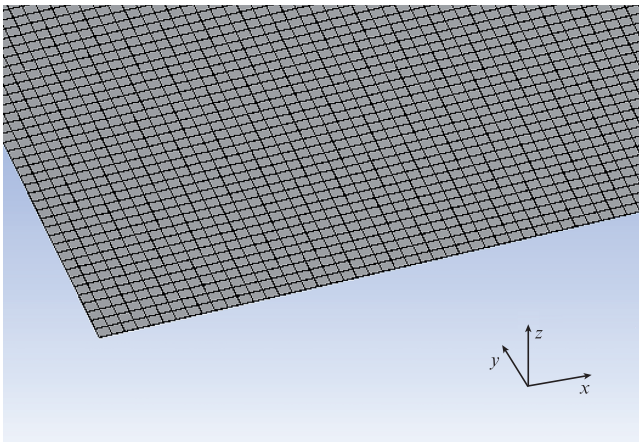

Рис.1. Фрагмент конечно-элементной модели для расчета собственных мод и частот колебаний пластины.

го набора вычисленных в ANSYS мод и соответствующих им частот следует исключить те, что отвечают колебаниям пластины в своей плоскости.

4. Сравнение численно-аналитического решения с решением целиком посредством МКЭ

Для примера рассмотрим модель подложки и приводов ДЗ, аналогичного тому, которое используется в проекте NIF [18], со следующими значениями параметров (материал пластины зеркала – оптическое стекло BK7): $a = b = 240$ мм, $h = 9$ мм, $E = 82$ ГПа, $\nu = 0.206$, $n_a = 39$, $F_0 = 400$ Н. Жесткость угловых приводов $K_{corner} = 60$ Н/мкм, жесткость приводов вдоль сторон $K_{side} = 45$ Н/мкм, жесткость внутренних приводов $K_{inside} = 30$ Н/мкм. План расположения приводов с нумерацией характерных из них показан на рис.2,*а*.

Предварительно в ANSYS были рассчитаны собственные моды, часть из них отброшена как моды колебаний в плоскости пластины. В итоге ряд (4) был просуммирован до максимального значения $\bar{i} = 211$. На рис.3 изображены некоторые аналитически рассчитанные функции влияния характерных приводов.

Для верификации полученного результата данная задача была решена целиком посредством МКЭ в системе ANSYS (3D-модель показана на рис.2,*б*). Пластина моделировалась объектом Surface body прямоугольной формы с заданными значениями толщины и физических констант. В качестве конечных элементов использовались элементы SHELL181, а в качестве приводов – объекты Spring с заданной жесткостью, расположенные согласно рассматриваемому плану и упирающиеся обратной стороной в абсолютно жесткое основание. Для того чтобы избежать сингулярности в точках крепления приводов к пластине, контакты между нею и пружинами выполнены в виде кружков диаметром 10 мм. Выбрана сетка разбиения с достаточно высокой плотностью со сгущением в кружках (число узлов 43170, число элементов 85954). На рис.4 приведена гистограмма, отображающая для функции влияния каждого характерного привода зеркала NIF разность полученного численно-аналитического решения и результата расчета целиком посредством МКЭ. Видно, что эти разности, оцененные по критериям среднеквадратичного отклонения (СКО) и размаха (peak-to-valley (PV)), малы по меркам точности, предъявляемой в задачах адаптивной оптики.

Аналогичные результаты получены для сравнительно плотного (рис.5,*а–в*) и разреженного (рис.5,*г–е*) планов расположения приводов; были взяты пластины с разным соотношением сторон, а также с различными коэффициентами Пуассона (при неизменном модуле Юнга) из диапазона, в котором варьируются значения для большинства используемых материалов: 0.025 для бериллия, 0.206 для стекла BK7 и 0.4 для оптических стекол некоторых других марок [19]. Результаты сопоставления предложенного решения и результатов расчетов целиком посредством МКЭ по критериям СКО и PV приведены в табл.1.

Помимо верификационных расчетов по МКЭ была проведена дополнительная проверка корректности данного подхода. Для случая, когда жесткости всех приводов одинаковы, были просуммированы все рассчитанные функции влияния при одинаковой внутренней силе. Суперпозиция полученных профилей оказалась в точности совпадающей с параллельным поперечным смещением пластины на величину, равную отношению силы к жесткости привода (рис.6). Таким образом, отсутствует так называемая ошибка совместного действия (pinning error [1]). Также была выполнена вторая проверка – на выполнение условий равновесия, т.е. равенства нулю суммы всех сил со стороны приводов и их моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей. Данные условия не использовались в процессе нахождения решения, но автоматически идеально выполняются:

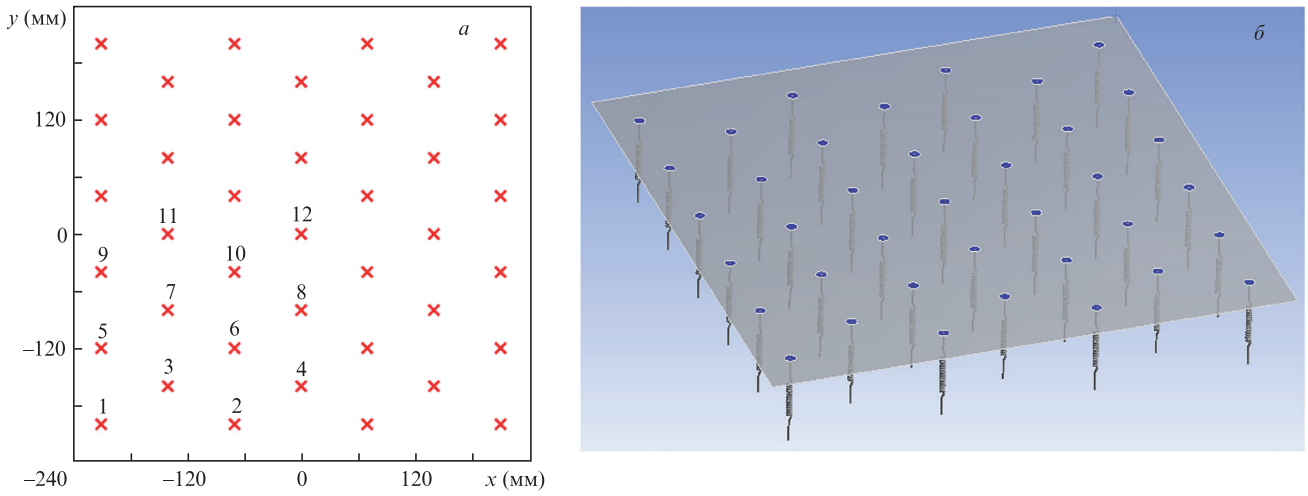

Рис.2. План расположения приводов зеркала NIF (*а*) и 3D-модель зеркала в ANSYS (*б*).

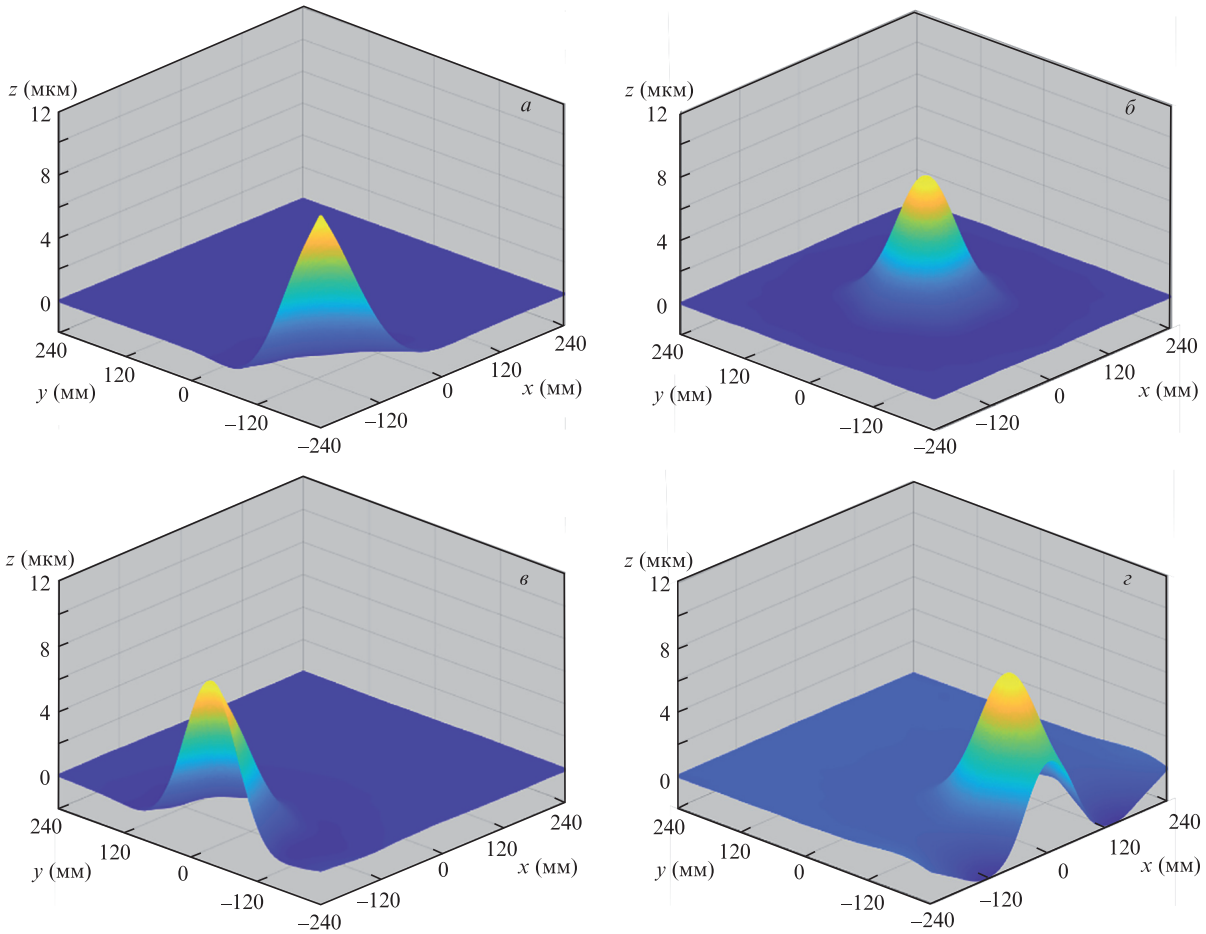

Рис.3. Функции влияния некоторых характерных приводов зеркала NIF: привод 1 (*а*), 12 (*б*), 9 (*в*) и 4 (*г*).

$$\left|\frac{F_0 - \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j}{F_0}\right| < 10^{-12}, \quad \left|\frac{F_0\, x_{j0} - \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j x_j}{F_0\, x_{j0}}\right| < 10^{-12},$$

$$\left|\frac{F_0\, y_{j0} - \sum_{j=1}^{n_a} K_j w_j y_j}{F_0\, y_{j0}}\right| < 10^{-12}.$$

Из табл.1 видно, что разности решений предлагаемым методом и результатов расчетов целиком посред-

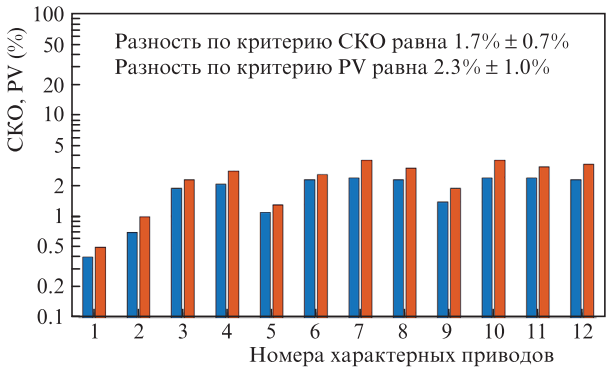

Рис.4. Гистограмма, отображающая для функции влияния каждого характерного привода зеркала NIF разность полученных численно-аналитических решений и результатов расчетов целиком посредством МКЭ.

Табл.1. Данные верификационного сравнения результатов численно-аналитических расчетов и расчетов целиком посредством МКЭ для разных ДЗ.

Параметры зеркала			Критерий сравнения	
размер пластины (мм)	коэффициент Пуассона ν	число приводов n_a	СКО (%)	PV (%)
400 × 400 × 9	0.4	49	1.8 ± 0.5	3.1 ± 0.6
400 × 400 × 9	0.206	49	1.9 ± 0.4	3.0 ± 0.4
400 × 400 × 9	0.025	49	1.8 ± 0.5	2.8 ± 0.6
300 × 400 × 9	0.4	49	2.0 ± 0.4	3.5 ± 0.6
300 × 400 × 9	0.206	49	2.0 ± 0.4	3.4 ± 0.7
300 × 400 × 9	0.025	49	2.0 ± 0.5	3.2 ± 0.8
200 × 400 × 9	0.4	49	2.1 ± 0.4	4.1 ± 0.8
200 × 400 × 9	0.206	49	2.1 ± 0.4	4.0 ± 0.9
200 × 400 × 9	0.025	49	2.2 ± 0.5	4.0 ± 0.9
400 × 400 × 9	0.4	16	0.33 ± 0.10	0.75 ± 0.22
400 × 400 × 9	0.206	16	0.34 ± 0.09	0.72 ± 0.22
400 × 400 × 9	0.025	16	0.38 ± 0.13	0.68 ± 0.22
300 × 400 × 9	0.4	28	1.1 ± 0.4	2.3 ± 0.8
300 × 400 × 9	0.206	28	1.1 ± 0.4	2.0 ± 0.7
300 × 400 × 9	0.025	28	1.1 ± 0.4	1.9 ± 0.7
200 × 400 × 9	0.4	28	1.1 ± 0.3	2.6 ± 0.7
200 × 400 × 9	0.206	28	1.1 ± 0.3	2.3 ± 0.7
200 × 400 × 9	0.025	28	1.2 ± 0.3	2.3 ± 0.7

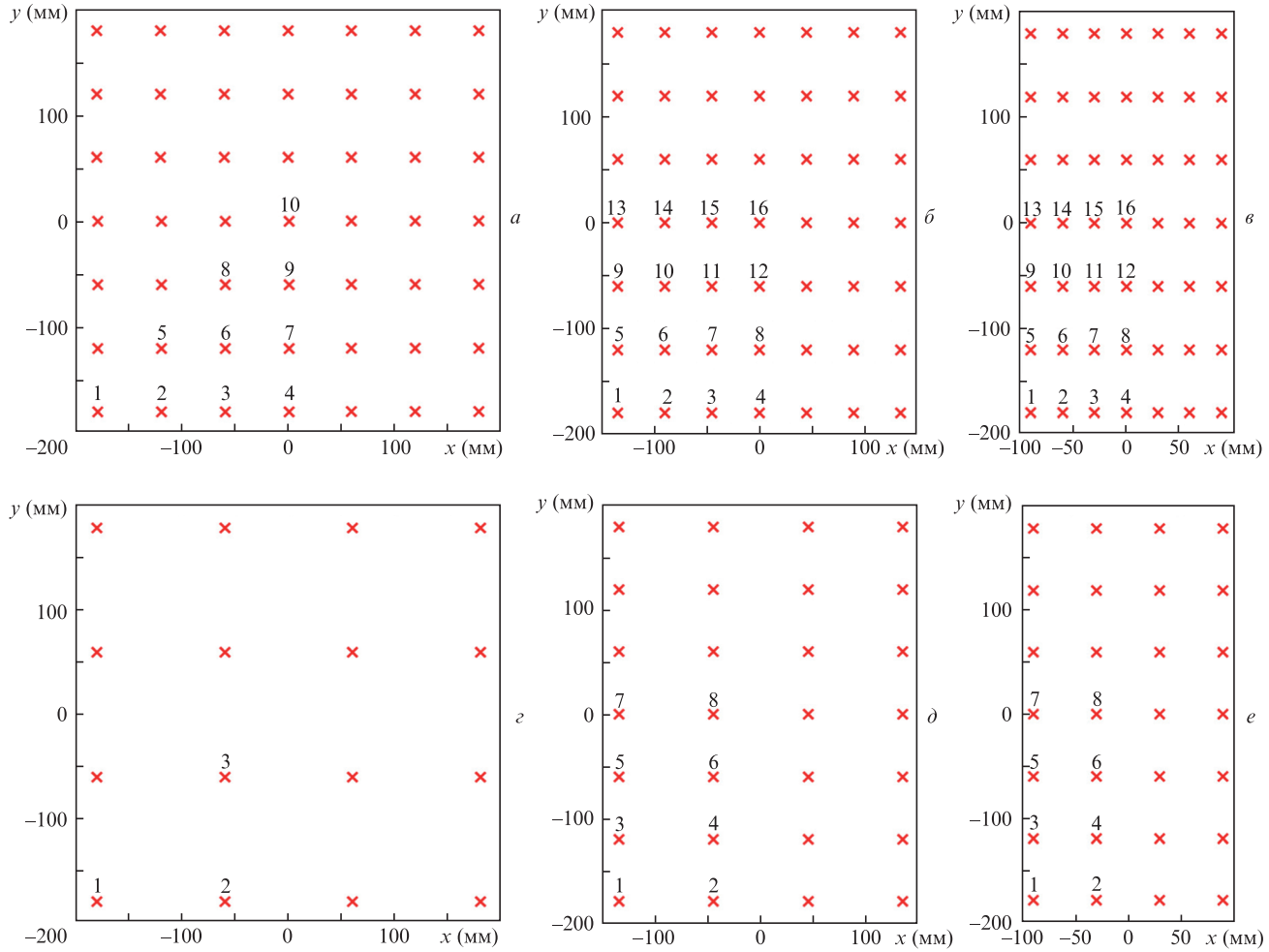

Рис.5. Планы с высокой, средней и низкой плотностями расположения приводов для верификационных расчетов.

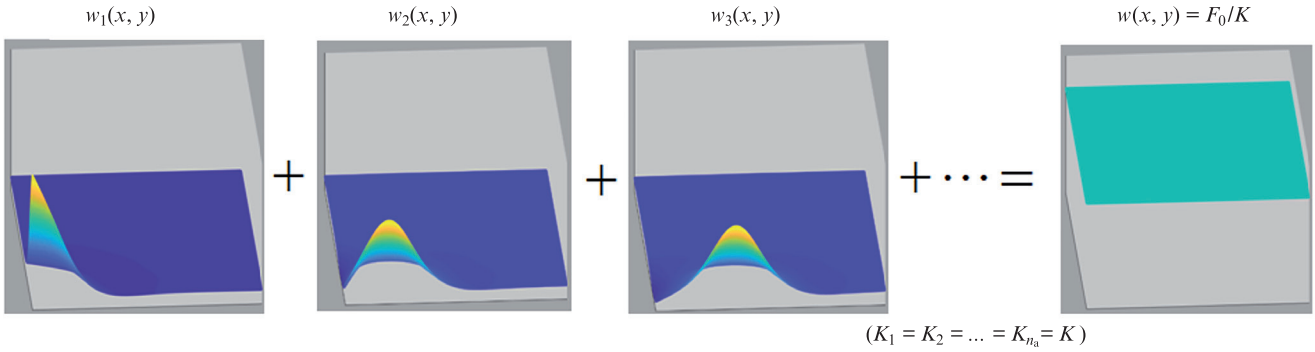

Рис.6. Иллюстрация равенства суммы функций влияния всех приводов параллельному поперечному смещению пластины.

ством МКЭ составили 0.3 %–2.2% по критерию СКО и 0.7 %–4.1% по критерию PV. Как и следовало ожидать, при менее плотном расположении приводов решение получается более точным. Ошибка расчета для приводов вблизи края зеркала меньше, чем для внутренних приводов, т. к. при деформации края более высокочастотные моды возбуждаются слабее (поэтому для внутренних приводов желательно брать частичную сумму ряда с бóльшим числом членов). Отметим следующую тенденцию: для бóльших значений коэффициента Пуассона материала пластины значение PV вычисляется на десятые доли процента менее точно. Кроме того, результаты верификации позволяют констатировать, что используемая модель сосредоточенных воздействий подходит для описания с высокой точностью воздействия пьезопривода с толкателем малого поперечного сечения на подложку зеркала.

5. Обсуждение метода

В отличие от существующих подходов [7, 14, 15], которые приводят к значительным ошибкам при расчете, а при малом числе приводов и вовсе неудовлетворительны, т. к. базируются на частично неверных предположениях, предложенный метод позволяет рассчитывать прогиб прямоугольного деформируемого зеркала с очень высокой точностью. Используемые в решении численно полученные моды собственных колебаний тонкой прямоугольной пластины можно с высокой точностью вычис-

лять с помощью МКЭ – для их геометрии построенная сетка обладает принципиально самым высоким качеством. Если же решать поставленную задачу целиком посредством МКЭ, то сетка будет уже неидеальной, т.к. должна учитывать зоны соприкосновения пластины с толкателями.

Предложенный метод вычисления функций влияния приводов ДЗ является общим и может быть использован для случая тонкой пластины любой формы, а также для произвольных граничных условий закрепления, т.е. когда заведомо нельзя получить аналитическое решение. В частности, если зеркало крепится в трех или четырех точках для того, чтобы дополнительно поворачиваться (корректировать наклоны волнового фронта падающего излучения), то тогда наиболее общим способом расчета будет предлагаемый метод. Он также может дать более высокую точность, чем при использовании целиком одного МКЭ, если некоторые приводы расположены близко к месту закрепления. Это связано с тем, что из-за высоких градиентов напряжений расчет по МКЭ в таких случаях может приводить к заметным ошибкам, а в нашем подходе используются моды колебаний, которые получены для одной пластины без приводов. Поэтому возникновения сингулярностей удается избежать.

6. Заключение

В настоящей работе предложен новый численно-аналитический метод расчета функций влияния приводов прямоугольного деформируемого зеркала со свободными краями на дискретных пьезоприводах. Уравнение для прогиба пластины решается аналитически в модели сосредоточенных воздействий методом разложения прогиба в ряд Фурье по модам собственных поперечных колебаний пластины. При этом применяются самосогласованные условия для деформации пластины и пьезоприводов. Неизвестные собственные частоты и формы колебаний берутся из численного расчета мод тонкой прямоугольной пластины по МКЭ. Результаты вычисления новым способом функций влияния приводов были верифицированы путем сравнения с решением целиком посредством МКЭ в программном комплексе ANSYS.

Часто для задач адаптивной оптики на первом этапе выбираются геометрия подложки зеркала и ее материал. Поэтому удобство представленного метода для проектирования и оптимизации конструкции заключается в том, что для вычисления функций влияния приводов достаточно рассчитать моды собственных колебаний пластины для выбранных материала, геометрии и способа закрепления на границе. Далее остается подставлять в расчетные формулы любой план расположения приводов, их жесткости, а также можно менять толщину пластины (временные частоты при этом пересчитываются прямо пропорционально толщине). Таким образом, предложенный подход позволяет существенно упростить и ускорить этап проектирования ДЗ для поставленной задачи.

1. Tyson R.K. *Principles of Adaptive Optics* (Boca Raton: CRC Press, 2015).
2. Тараненко В.Г., Шанин О.И. *Адаптивная оптика в приборах и устройствах* (М.: ЦНИИатоминформ, 2005).
3. Малашко Я.И., Наумов М.Б. *Системы формирования мощных лазерных пучков* (М.: Радиотехника, 2013).
4. Hu L. et al. *High Power Laser Sci. Eng*., **2**, e1 (2014).
5. Самаркин В.В. *Квантовая электроника*, **45** (12), 1086 (2015) [*Quantum Electron.*, **45** (12), 1086 (2015)].
6. Menikoff A. *Appl. Opt*., **30** (8), 833 (1991).
7. Ляхов Д.М. *Сборник трудов ФГУП «НИИ НПО "ЛУЧ"» 2006–2016 гг*. (Подольск, 2016).
8. Ягнятинский Д.А., Федосеев В.Н. *Автометрия*, **57** (1), 68 (2021) [*Optoelectron. Instrum. Data Proces.*, **57** (1), 60 (2021)].
9. Garcia H.R., Brooks L.D. *Proc. SPIE*, **141** (*Adaptive Optical Components*), 74 (1978).
10. Huang L. et al. *Opt. Express*, **16** (1), 108 (2008).
11. Papkov S.O. *Acoust. Phys*., **61** (2), 136 (2015).
12. Serjantović I. et al. *Thin Wall. Struct*., **95**, 101 (2015).
13. Serjantović I. et al. *Trans. Famena*, **XL-3**, 1 (2016).
14. Ляхов Д.М. *Автометрия*, **52** (1), **70** (2016) [*Optoelectron. Instrum. Data Proces.*, **52** (1), 57 (2016)].
15. Федосеев В.Н., Ягнятинский Д.А. *Прикладная математика и механика*, **83** (4), 653 (2019) [*Mech. Solids*, **54** (5), 750 (2019)].
16. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки* (М.: Наука, 1966).
17. Бабаков И.М. *Теория колебаний* (М.: Наука, 1965).
18. Sachs R. et al. *Proc. SPIE*, **3492**, 0277-786X (1999).
19. Немилов С.В. *Оптическое материаловедение: оптические стекла* (СПб., СПбГУ ИТМО, 2011).