Адаптивная фазовая коррекция вихревых лазерных пучков в турбулентной атмосфере

П.А.Коняев, В.П.Лукин

Методом компьютерного моделирования изучена возможность коррекции амплитудно-фазовых искажений лазерных пучков Лагерра – Гаусса на атмосферных трассах. Использована схема динамической адаптивной коррекции по принципу фазового сопряжения опорной волны от вспомогательного когерентного источника. Путём численного решения неоднородного параболического волнового уравнения моделируется распространение пучков в случайно-неоднородной среде со степенным пространственным спектром, характерным для атмосферной турбулентности. Скалярное волновое уравнение решается методом расщепления – преобразования Фурье с использованием алгоритмов параллельной архитектуры. Рассмотрено влияние турбулентности атмосферы на флуктуации орбитального углового момента вихревых пучков Лагерра – Гаусса, теоретически показана возможность и оценена эффективность коррекции этих флуктуаций с помощью адаптивной оптической системы фазового сопряжения. Отмечена роль академика Н.Г.Басова в организации систематических исследований распространения когерентных оптических волн в атмосфере как случайно-неоднородной среде.

Ключевые слова: *атмосферная адаптивная оптика, управление светом, структурированные пучки, сингулярная оптика, орбитальный угловой момент, вычислительная физика.*

1. Введение

Влиянию атмосферной турбулентности на возможность использования сингулярной оптики в оптических системах связи уже сравнительно давно уделяется большое внимание, т.к. атмосфера принципиально ограничивает применение вихревых пучков в системах дистанционной передачи информации [1–6]. Теоретически исследовались потери пространственной когерентности пучками, несущими топологический заряд, а также другие искажающие факторы, связанные с турбулентностью атмосферы [7–9]. Проводились компьютерное моделирование распространения волн в случайно-неоднородной среде, а также физическое моделирование в лабораторных условиях [10, 11] и эксперименты на протяжённых трассах [12]. В то же время задачу подавления или хотя бы минимизации атмосферных искажений в сингулярных пучках вряд ли можно считать до конца решённой.

Потенциальная возможность применения в атмосфере вихревых пучков, например в оптических системах связи, основана на том, что пучки с различными топологическими зарядами ортогональны [3]. Кодировка излучения по величине топологического заряда возможна и осуществима при передаче даже одиночных фотонов, а мультиплексирование пучков позволяет существенно уплотнить каналы передачи информации в открытой атмосфере [13]. И хотя вихревые пучки более устойчивы к турбулентным искажениям и сохраняют топологический заряд на атмосферной трассе [8, 12, 14, 15], из-за амплитудно-фазовых флуктуаций при их распространении в случайно-неоднородной среде возникают флуктуации орбитального углового момента (ОУМ) [6, 9, 16], приводящие к перекрёстным помехам между ОУМ мод. Естественно, появляется идея активной динамической фазовой коррекции искажений вихревых пучков путём использования методов адаптивной оптики [17].

П.А.Коняев, В.П.Лукин. Институт оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН, Россия, 634055 Томск, пл. Акад. Зуева, 1;
e-mail: petrkonyaev@gmail.com, lukin@iao.ru

Поступила в редакцию 25 июля 2022 г., после доработки – 19 сентября 2022 г.

2. Роль Н.Г.Басова в формировании направления исследований по изучению особенностей переноса когерентного лазерного излучения в атмосфере

В своей статье [18] П.В.Зарубин уделил достаточное внимание основным проблемам, которые интересовали Н.Г.Басова в связи с его историческим открытием – созданием источника когерентного света (лазера). Проблем, связанных с применением когерентного света, действительно было множество, и, в основном, они решались «внутри» подразделений двух крупнейших физических институтов СССР – ФИАНа и ИОФАНа. Однако среди этих проблем были и такие, для решения которых привлекались (и даже создавались) научные коллективы из других разделов науки. Одной из проблем стало исследование взаимодействия когерентного лазерного излучения с земной атмосферой [19]. В конце 1960-х гг. по инициативе Н.Г.Басова и А.М.Прохорова была развернута программа по исследованию особенностей распространения лазерного излучения в атмосфере. Эти работы возглавили и вели два академических института – Институт физики атмосферы (ИФА) АН СССР и созданный в 1969 г. Институт оптики атмосферы (ИОА) СО АН СССР. Работы, выполненные учеными этих институтов, носили фундаментальный характер и заслуженно получили широкое мировое признание. Одним из достижений стало создание (в районе озера Балхаш) специального измерительного комплекса для исследований состояния атмосферы и особенностей прохождения через нее лазерного излучения. Были решены вопросы теории распространения света в случайно-неоднородных средах, созданы специализированные комплексы измерительной аппаратуры

и разработаны методики измерений. Особое внимание было уделено влиянию на распространение лазерного излучения атмосферной турбулентности – именно того процесса, который превращает атмосферу в динамическую случайно-неоднородную оптическую среду [20–22].

Совокупным итогом этой огромной работы стало формирование в Томске научной школы атмосферной оптики академика В.Е.Зуева. Научные идеи академика Н.Г.Басова по применению когерентного излучения легли в основу исследований томской школы, продолжающихся уже многие годы. Безусловно, первоначально высказанные идеи постоянно получают новое развитие и те задачи, которые ещё недавно казались фантастическими, становятся реальными. Так получилось и с идеей переноса в атмосфере когерентного лазерного излучения. Примерно с середины 1970-х гг. когерентная оптика получила новую технику управления светом – оптику, основанную на дифракционных элементах. Это позволило к началу XXI века говорить о появлении новых физических возможностей по созданию так называемого структурированного света. При этом, прежде всего, следует упомянуть о работах по формированию когерентного излучения с помощью специальных дифракционных оптических элементов, которые назывались «киноформами», «фокусаторами» [23]. В настоящее время структурированный свет [10] формируется динамическими дифракционными элементами, методами цифровой голографии [11], пространственными модуляторами света и другой техникой, в том числе с использованием методов, реализующих усиление и обращение волнового фронта [24, 25].

Успехи в создании новой техники управления светом, в свою очередь, стимулировали движение вперед как теории, так и практики применения специально сформированных когерентных пучков излучения. Появилось даже новое направление в оптике – генерация и применение вихревых световых пучков, переносящих запасённую в угловом и спиновом орбитальных моментах энергию [26–28]. Вихревые пучки, обладающие целым набором особенных свойств, могут оказаться востребованными в современных оптико-электронных системах, работающих в случайно-неоднородных средах, таких как земная атмосфера.

Следующий импульс к развитию техника управления когерентным светом получила в связи с появлением нового научного направления – адаптивной оптики. Как и в случае с лазером, идеи адаптивной оптики родились практически одновременно и в СССР (В.П.Линник, 1957 г. [29]), и в США (Х.Бэбкок, 1955 г. [17]). Совместное использование техники дифракционной оптики и адаптивной оптики позволяет создавать новые возможности при формировании когерентных лазерных пучков и обеспечивать их перенос через случайные среды, сохраняя при этом замечательные свойства пучков, например ОУМ и заданную структуру в пространстве и во времени [1–3].

В настоящей работе сделана попытка теоретической оценки «сверху» эффективности применения адаптивной фазовой коррекции волнового фронта сингулярных вихревых пучков в турбулентной атмосфере. Применяется традиционная схема адаптивной коррекции, использующая принцип обращения волнового фронта и реализованная методом фазового сопряжения опорной волны от независимого когерентного источника (бакена), который расположен на противоположном конце атмосферной трассы.

3. Математическая постановка задачи

Для компьютерного моделирования нами традиционно используется самый популярный на сегодняшний день вычислительный метод – быстрое преобразование Фурье в сочетании с двухциклическим алгоритмом расщепления волнового уравнения [7]. Теоретическое исследование динамического процесса распространения скалярных волновых пучков в атмосфере осуществляется путём совместного решения системы уравнений для комплексной амплитуды $U(\boldsymbol{r},z)$ поля лазерного пучка и нестационарного уравнения ветрового переноса среды (вариаций показателя преломления $\tilde{n}(\boldsymbol{r},z)$) с вектором скорости $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$:

$$2\mathrm{i}k_0 \frac{\partial U(\boldsymbol{r},z)}{\partial z} = \nabla_\perp^2 U(\boldsymbol{r},z) + 2k_0^2 \tilde{n}(\boldsymbol{r},z) U(\boldsymbol{r},z), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{n}(\boldsymbol{r},z)}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{n}(\boldsymbol{r},z) = 0, \tag{2}$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число излучения с заданной длиной волны λ.

Трасса распространения вдоль оси z, согласно применяемому при расчётах методу расщепления, разбивается на дискретные участки, число которых в численных экспериментах варьируется в зависимости от параметров задачи. Случайные вариации показателя преломления $\tilde{n}(\boldsymbol{r},z)$, вызванные атмосферной турбулентностью, задаются в виде дискретного набора слоёв:

$$\tilde{n}(\boldsymbol{r},z) = \sum_{n=1}^{N} \left[\delta(z - z_n) \int_{z_{n-1}}^{z_n} \tilde{n}(\boldsymbol{r},z')\,\mathrm{d}z' \right]$$

$$= -k_0^{-1} \sum_{n=1}^{N} \left[\delta(z - z_n) \varphi_n(\boldsymbol{r}) \right], \tag{3}$$

где z_n – координата n-го слоя; N – число слоёв; $\delta(z - z_n)$ – дельта-функция Дирака.

Фазовые возмущения $\varphi_n(\boldsymbol{r})$ в каждом слое полагаются статистически независимыми, однородными и изотропными случайно-неоднородными двумерными полями со степенной спектральной плотностью, представленной модифицированной моделью Кармана:

$$\Phi_{\tilde{n}}(\varkappa) = 0.033 C_n^2 (\varkappa_{\mathrm{L}}^2 + \varkappa^2)^{-11/6} \exp(-\varkappa^2/\varkappa_{\mathrm{m}}^2). \tag{4}$$

Здесь C_n^2 – структурная характеристика турбулентности атмосферы; $\varkappa_{\mathrm{L}}$ и $\varkappa_{\mathrm{m}}$ – волновые числа, отвечающие внешнему и внутреннему масштабам турбулентности соответственно.

На рис.1 приведена иллюстрация процесса моделирования сплошной среды с помощью дискретной модели. Плоскость излучателя $z = 0$ находится слева вверху, а плоскость приёмника – справа внизу.

Для численного решения волнового уравнения (1) нами используется метод расщепления с применением параллельных алгоритмов быстрого преобразования Фурье из библиотеки Intel MKL. Система уравнений (1), (2) формулируется в безразмерном виде с нормировкой

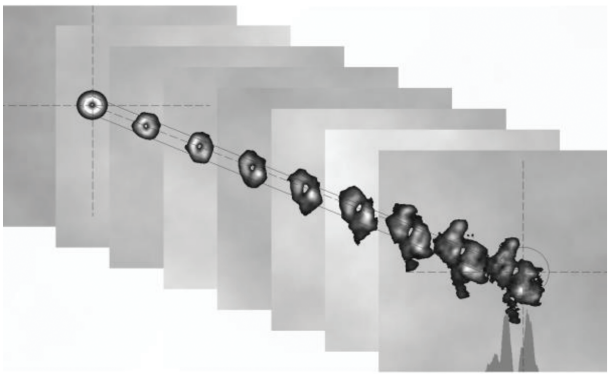


Рис.1. Иллюстрация процесса моделирования распространения вихревого пучка методом расщепления – преобразования Фурье.

всех переменных на характерные масштабы задачи (подробное изложение всех алгоритмов приведено в [7]). Из теории волн в случайно-неоднородных средах следует, что флуктуации световых пучков полностью определяются величиной структурной функции фазы на диаметре апертуры $D_\varphi(2a_0) = 6.88(2a_0/r_0)^{5/3}$, где a_0 – начальный радиус пучка. Размер области когерентности поля характеризуется радиусом $r_0 = (0.423k_0^2LC_n^2)^{-3/5}$ (L – длина трассы), поэтому значение $D_\varphi(2a_0)$ и величина отношения $D/r_0 = 2a_0/r_0$ в равной степени могут быть использованы в качестве метрик турбулентности атмосферы.

В настоящей работе задавались следующие безразмерные параметры задачи: волновой параметр трассы $z_0 = L/(k_0a_0^2)$, параметр фокусировки пучка $\delta = k_0a_0^2/f_0$ (f_0 – фокусное расстояние), время $\tau = t/\tau_v$ ($\tau_v = a_0/v$) и параметр турбулентности $D_s = \sqrt{D_\varphi(2a_0)}$. Размерными задаваемыми параметрами были длина волны излучения и начальный радиус пучка. В качестве целевой функции вычислялось среднеквадратичное отклонение флуктуаций полного ОУМ.

4. Пучки Лагерра – Гаусса с ОУМ

Для получения частных решений системы уравнений (1), (2) задавались начальные условия в плоскости $z = 0$ в виде скалярных моделей линейно поляризованного когерентного излучения. Стандартная модель супергауссова пучка с параметром m и комплексной амплитудой поля $U_G(x, y)$ описывалась выражением

$$U_G(x,y) = U_0\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2+y^2}{a_0^2}\right)^m + \mathrm{i}k_0\frac{x^2+y^2}{f_0^2}\right]\right\}. \quad (5)$$

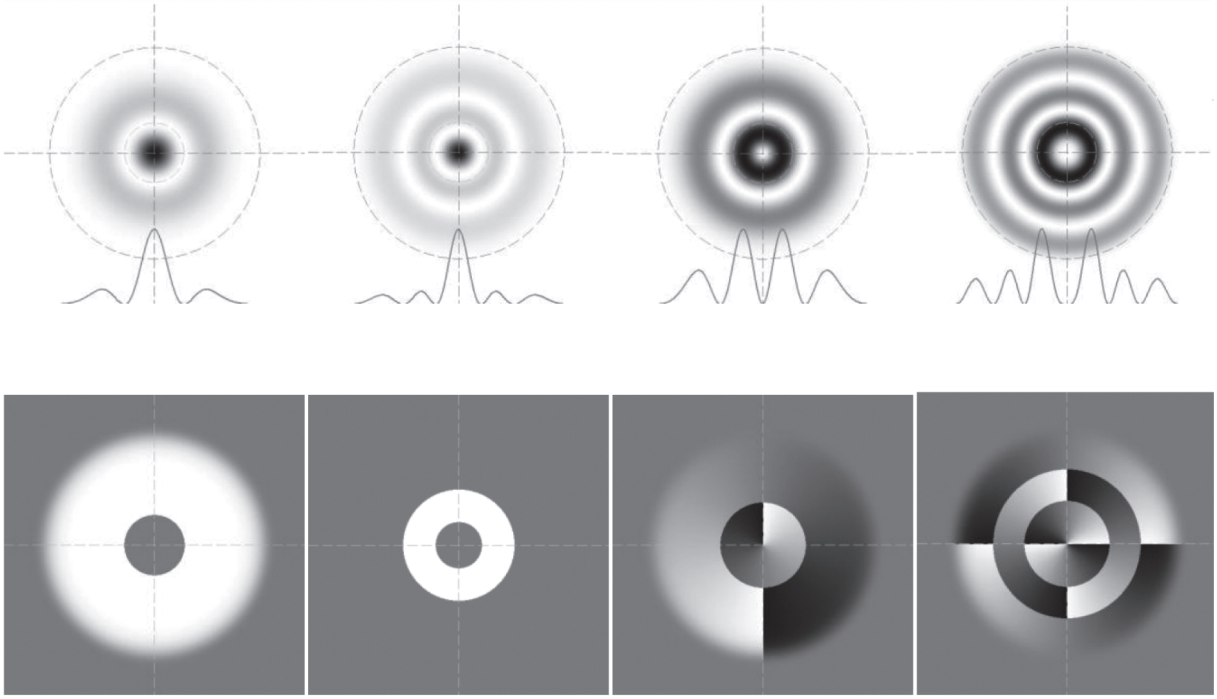
Многокольцевой пучок Лаггера – Гаусса LG_{pl} с индексами p, $l = 0, 1, 2, \ldots$ задавался в полярных координатах r, θ ($r^2 = x^2 + y^2$) формулой

$$U_{LG}(r,\theta) = cU_G(r/a_0)^{|l|}L_p^{|l|}(2r^2/a_0^2)\exp(\mathrm{i}l\theta), \quad (6)$$

где $c = \sqrt{2p!/\pi(p+|l|)!}$ – нормирующий множитель; $L_p^{|l|}(x)$ – функция Лагерра с индексами p и l, которые определяют число колец и заряд оптического вихря соответственно.

Пучки LG_{pl} являются собственными функциями параболического уравнения (1), поэтому обладают свойством инвариантности (с точностью до масштаба) при свободном распространении. Двумерное распределение интенсивности в поперечном сечении имеет вид одного кольца при $p = 1$ или набора колец, вложенных друг в друга, при $p > 1$ (рис.2).

В сингулярной оптике пучки LG_{pl} используются как стандартные модели вихревых пучков. Их отличитель-



а *б* *в* *г*

Рис.2. Распределения в поперечном сечении при $D/a_0 = 8$ интенсивности (верхний ряд) и фазы (нижний ряд) пучков LG_{pl} с индексами $p = 1$, $l = 0$ (*а*), $p = 2$, $l = 0$ (*б*), $p = 1$, $l = 1$ (*в*) и $p = 2$, $l = 2$ (*г*).

ной характеристикой является наличие начального ОУМ при $l > 0$. Благодаря радиальной симметрии таких пучков значение топологического заряда $l = 1, 2, \ldots$, задаваемого по формуле (6), совпадает с величиной полного ОУМ и сохраняется при распространении их в однородной среде. В случайно-неоднородной среде закон сохранения для среднего ОУМ остаётся в силе, но за счёт амплитудно-фазовых флуктуаций комплексной амплитуды поля возникают флуктуации мгновенных значений ОУМ, а также происходит деградация вихря и размывание средней фазы [5, 9, 16, 30].

В настоящей работе вычисление полного ОУМ относительно точки (x_0, y_0) – центра декартовой системы поперечных координат, проводилось как сумма $M(z) = M_x + M_y$ осевых проекций ОУМ, сравнение которых позволяло анализировать изотропность флуктуаций в процессе моделирования динамической турбулентности. Проекции ОУМ рассчитывались через градиент фазы $\varphi(x, y) = \arctan[\mathrm{Im}U(x, y)/\mathrm{Re}U(x, y)]$ по следующим формулам [6]:

$$M_x(z) = -\frac{1}{P_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty} I(x,y;z)(x - x_0)\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y;z)\,\mathrm{d}x,$$

$$M_y(z) = -\frac{1}{P_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty} I(x,y;z)(y - y_0)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y;z)\,\mathrm{d}x, \quad (7)$$

$$I(x,y) = U(x,y)\,U^*(x,y), \quad P_0 = \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} I(x,y;z=0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

При проведении статистических расчётов мы использовали два способа усреднения получаемых характеристик, в частности характеристик (7). Для анализа нестационарных процессов решалась система уравнений (1), (2) с усреднением по времени на малом интервале $\tau \approx 0.5-1.0$ с минимальным шагом $\delta\tau = \mathrm{d}x/v$. Таким образом моделировалась работа динамической системы в режиме «короткой экспозиции». Для получения репрезентативных данных применялся второй, традиционный способ усреднения по некоррелированным выборкам (метод Монте-Карло), являющийся аналогом «длинной экспозиции».

5. Флуктуации ОУМ и фазовая коррекция пучков Лагерра – Гаусса

Распространение вихревых пучков в случайно-неоднородной атмосфере сопровождается появлением флуктуаций их начального ОУМ. Эти флуктуации возникают из-за искажений фазы $\varphi(x, y)$ пучка, вызванных пространственно-временными неоднородностями среды. Качественная картина поперечного распределения усреднённой в режиме короткой экспозиции фазы $\langle\varphi(x, y)\rangle$ вихревого пучка LG_{pl} в условиях слабой турбулентности ($D_s < 3$) представлена на рис.3. Строки 1–4 матрицы кадров соответствуют различным значениям индексов пучков LG_{pl}: 1 – LG_{01}, 2 – LG_{02}, 3 – LG_{11}, 4 – LG_{22}. Столбцы I–V иллюстрируют процесс искажений, начиная от исходного распределения фазы с $D_s = 0$ (I) до распределений

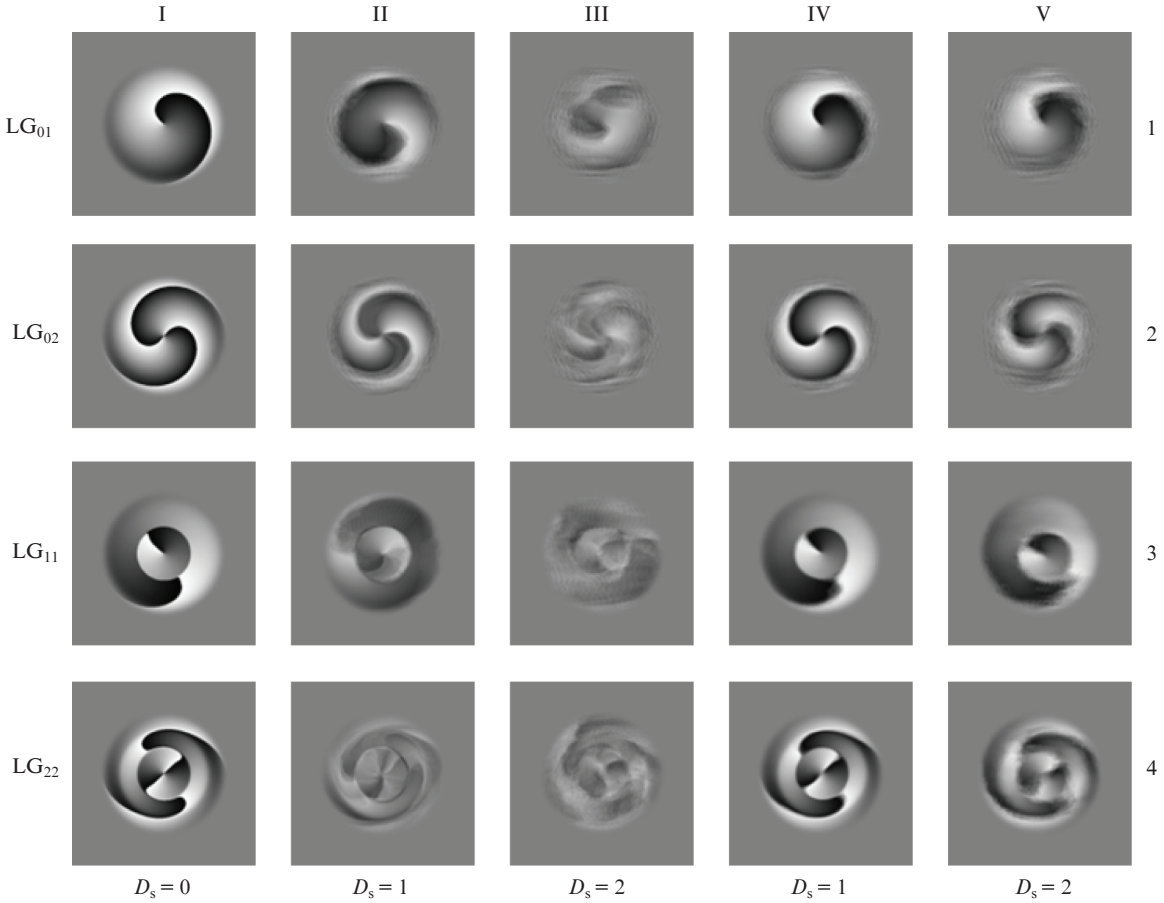


Рис.3. Усреднённая в поперечном сечении фаза $\varphi(x, y)$ вихревых пучков LG_{pl} при распространении их в случайно-неоднородной среде (столбцы I–III) и результат фазовой коррекции (IV, V).

с $D_s = 1$ (II) и $D_s = 2$ (III), а также результаты коррекции (IV, V).

Усреднение в режиме короткой экспозиции позволяет наблюдать во времени процесс случайных смещений и поворотов фазового вихря (столбец II). При этом заметен сдвиг его начального угла поворота, вызванный вкладом в фазу крупномасштабной неоднородности. Увеличение параметра турбулентности D_s приводит к увеличению смещений и искажений фазового профиля, а усреднение фазы – к замыванию картины (столбец III).

Алгоритм коррекции методом фазового сопряжения (phase conjugation) заключался в следующем. На каждом временном шаге моделировалось распространение опорного пучка (бакена) в направлении от приёмника к передатчику. Затем вычислялся поперечный профиль флуктуационной фазы опорного пучка, который использовался для предварительной фазовой коррекции основного (вихревого) пучка в направлении от передатчика к приёмнику.

В столбцах IV и V приведены результаты, которые демонстрируют возможность почти полной реконструкции начального распределения фазы вихря в слаботурбулентной атмосфере, когда $D_s < \pi$. Интересно, что коррекция по фазе опорного пучка полностью компенсирует сдвиг начального угла поворота вихря (столбцы IV и V), характерный для нескорректированных пучков (столбцы II и III).

Количественный анализ флуктуаций ОУМ при переходе к рассмотрению более сильной турбулентности ($D_s > \pi$) требует увеличения интервала времени усреднения. Последующие результаты были получены усреднением по независимым случайным выборкам стандартным методом [7]. Волновой параметр трассы z_0 составлял 0.01. Использовались модели коллимированных ($\delta = 0$) и сфокусированных ($\delta = 1/z_0$) многокольцевых ($p = 0, 1, 2$) пучков Лагерра–Гаусса. Для оценки флуктуаций значений ОУМ, вычисленных по формулам (7), начальное значение углового момента $M_0(z = 0)$ вычиталось из текущего значения $M_n(z)$ в каждой реализации вычислительного эксперимента. Итоговая оценка среднеквадратичного отклонения ОУМ σ проводилась по ансамблю из $N = 1000$ реализаций согласно формуле

$$\sigma = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} [M_n(z) - M_0]^2 / N}\,. \qquad (8)$$

Флуктуации ОУМ возникают в случайно-неоднородной среде как при наличии, так и в отсутствие у лазерного пучка топологического заряда l. На рис.4 приведены зависимости среднеквадратичного отклонения σ флуктуаций «наведённого» атмосферой ОУМ от параметра турбулентности D_s в безвихревых ($l = 0$) многокольцевых пучках LG_{10} и LG_{20} в сравнении с гауссовым пучком LG_{00}.

Если поведение на начальном участке всех трёх кривых можно считать одинаковым, то уровни насыщения флуктуаций существенно различаются. Чем меньше значение радиального индекса p, тем больше насыщение и тем позднее (при бóльших значениях D_s) оно наступает. Таким образом, при распространении в условиях сильной турбулентности многокольцевые пучки оказываются предпочтительными.

Количественная оценка эффективности фазовой коррекции вихревых пучков была проведена для сфокусированных пучков Лагерра–Гаусса нулевого и первого радиальных порядков p с единичным топологическим зарядом l. На рис.5 приведены зависимости σ от параметра D_s для пучков LG_{01} и LG_{11} без коррекции и с коррекцией методом фазового сопряжения опорной волны. В отличие от стандартного вихревого пучка LG_{01}, многокольцевой пучок LG_{11} имеет значительно меньшие σ в случайно-неоднородной среде и, как следствие, значительно более слабые флуктуации ОУМ после коррекции.

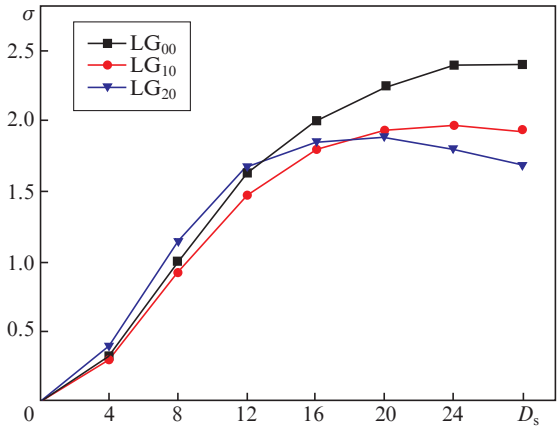


Рис.4. Наведённые турбулентностью флуктуации ОУМ безвихревых пучков LG_{pl} с индексами $p = 0, 1, 2$ и $l = 0$.

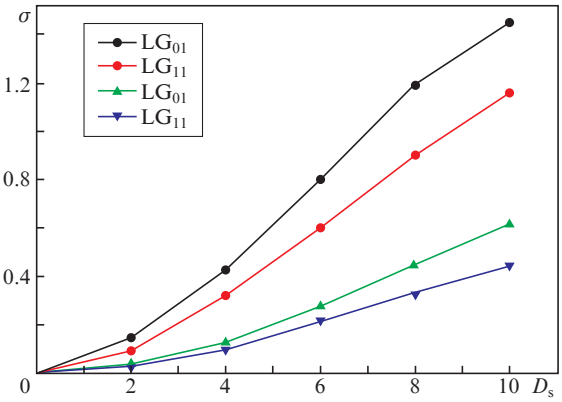


Рис.5. Флуктуации сфокусированных вихревых пучков LG_{01} и LG_{11} без коррекции (кружки) и с коррекцией методом фазового сопряжения опорной волны (треугольники).

Следует отметить, что снижение σ до $\sigma < 0.5$ достигнуто в диапазоне значений турбулентного параметра $0 < D_s < 10$, который соответствует типичным реальным условиям атмосферной турбулентности на приземных трассах. Например, для приведённых результатов при длине волны $\lambda = 1$ мкм и начальном радиусе пучка $a_0 = 0.05$ м длина трассы $L = 1500$ м, а структурная постоянная показателя преломления $C_n^2 = 5.2 \times 10^{-14}$ м$^{-2/3}$ для $D_s = 8$. В этом случае радиус когерентности $r_0 = 2.6$ см.

6. Выводы

В настоящей работе теоретически изучен вопрос о коррекции турбулентных флуктуаций фазы вихревых пучков на атмосферных трассах методом компьютерного моделирования. Рассмотрены флуктуации ОУМ в когерентных пучках Лаггера–Гаусса в замкнутом контуре адаптивной системы с фазовым сопряжением опорной волны. Показана возможность расширения диапазона

применения вихревых пучков в приложениях атмосферной оптики в условиях умеренно сильной турбулентности.

Отмечено, что флуктуации ОУМ возникают в случайно-неоднородной среде вне зависимости от наличия у лазерного пучка топологического заряда. В то же время флуктуации ОУМ ослабляются при увеличении радиального порядка (индекса p) пучков LG_{pl}, что даёт многокольцевым пучкам преимущество перед гауссовыми на атмосферных трассах.

Результаты вычислительных экспериментов по адаптивной фазовой коррекции вихревых пучков дают основание полагать, что полученное снижение среднеквадратичного отклонения флуктуаций ОУМ пучков Лаггера–Гаусса (до $\sigma < 0.5$) в достаточно широком диапазоне изменения атмосферной турбулентности означает потенциальную возможность их применения в атмосфере, в частности в лазерных оптических системах связи.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института оптики атмосферы им. В.Е.Зуева СО РАН.

1. Willner A.E., Huang H., Yan Y., Ren Y., Ahmed N., Xie G., Bao C., Li L., Cao Y., Zhao Z., Wang J., Lavery M.P.J., Tur M., Ramachandran S., Molisch A.F., Ashrafi N., Ashrafi S. *Adv. Opt. Photonics*, **7** (1), 66 (2015).
2. Lukin I.P. *Proc. SPIE*, **10035**, 100351H (2016).
3. Котляр В.В., Ковалев А.А., Порфирьев А.П. *Компьютерная оптика*, **38** (4), 651 (2014).
4. Lukin V.P., Konyaev P.A., Sennikov V.A. *Appl. Opt*., **51** (1), C84 (2012).
5. Soifer V.A., Korotkova O., Khonina S.N., Shchepakina E.A. *Comput. Opt*.., **40** (5), 605 (2016).
6. Aksenov V.V., Kolosov V.V., Filimonov G.A., Pogutsa C.E. *J. Opt*., **18**, 054013 (2016).
7. Konyaev P.A., Lukin V.P. *Appl. Opt*., **55** (12), 107 (2016).
8. Карпеев С.В., Паранин В.Д., Кириленко М.С. *Компьютерная оптика*, **41** (2), 208 (2017).
9. Charnotskii M. *J. Opt. Soc. Am*., **35** (5), 702 (2018).
10. Pinnell J., Nape I., Sephton B., Cox M.A., Rodriguez-Fajardo V., Forbes A. *Opt. Soc. Am. A*, **37** (11), C146 (2020).
11. Soifer V.A., Golub M.A. *Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms* (Boca Raton: CRC Press, 1994).
12. Krenn M. et al. *Proc. National Acad. Sci*., **113** (48), 13648 (2016).
13. Willner A.E., Zhao Z., Liu C., et al. *APL Photonics*, **6**, 030901 (2021).
14. Gbur G., Tyson R.K. *J. Opt. Soc. Am. A*, **25** (1), 225 (2008).
15. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Nalimov A.G., Porfirev A.P. *Phys. Rev. A*, **102**, 023516 (2020).
16. Aksenov V.P., Dudurov V.V., Kolosov V.V., Filimonov G.A. *OSA Continuum*, **4** (7), 1945 (2021).
17. Hardy J.W. *Adaptive Optics for Astronomical Telescopes* (New York: Oxford University Press, 1998).
18. Зарубин П.В. *Квантовая электроника,* **32** (12), 1048 (2002) [*Quantum Electron*., **32** (12), 1048 (2002)].
19. Татарский В.И. *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (М.: Наука, 1967).
20. Зуев В.Е. *Распространение лазерного излучения в атмосфере* (М.: Радио и связь, 1981).
21. Зуев В.Е., Банах В.А., Покасов В.В. *Оптика турбулентной атмосферы* (Л.: Гидрометеоиздат, 1988).
22. Беляев Е.Б., Воробьев В.В., Землянов А.А., Кандидов В.П., Колосов В.В., Коняев П.А., Копытин Ю.Д., Кузиковский А.В., Лукин В.П., Носов В.В., Пенин С.Т., Пономарев Ю.Н., Семенов Л.П., Чистякова Л.К. *Нелинейные оптические эффекты в атмосфере. Монография-справочник.* Под ред. акад. В.Е.Зуева, В.В.Носова (Томск: Изд-е СО АН СССР, 1987, Т. III).
23. Сисакян И.Н., Сойфер В.А. *Компьютерная оптика*, **1**, 5 (1987).
24. Басов Н.Г., Ефимков В.Ф., Зубарев И.Г., Котов А.В., Михайлов С.И. *Квантовая электроника*, **8** (10), 2191 (1981) [*Sov. J. Quantum Electron*., **11** (10), 1335 (1981)].
25. Кулагин О.В., Пасманик Г.А., Шилов А.А. *УФН*, **162** (6), 129 (1992).
26. Soskin M.S., Vasnetsov M.V. *Prog. Opt*., **42**, 219 (2001).
27. Volyar A., Bretsko M., Akimova Ya., Egorov Yu. *Opt. Lett*., **43**, 5635 (2018).
28. Lukin V.P. *Appl. Opt*., **51** (10), C176 (2012).
29. Линник В.П. *Оптика и спектроскопия*, **25** (4), 401 (1957).
30. Lukin V.P., Konyaev P.A., Sennikov V.A. *Proc. SPIE*, **11532**, 115320P (2020).